Université Paris Dauphine
DUMI2E 1e année
Analyse 2 — 2015-2016

CC2 du 11 avril 2016
Durée 1h20
Documents et calculatrice non autorisés.

Exercice 1 Les questions de cet exercise sont indépendantes.

(a) Calculer $I_1 := \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(3x - \frac{\pi}{2})dx$.

(b) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $\alpha > 0$, calculer $I_2 := \displaystyle\int_1^e x^\alpha \ln(x)dx$.

(c) Calculer une primitive de la fonction $f(x) = (x+2)e^{-2x}$.

Exercice 2 Les questions de cet exercise *ne sont pas* indépendantes, mais on pourra admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

(a) En utilisant la formule de Taylor-Young, donner le développement limité de la fonction $x \to \arctan(x)$ à l'ordre 3 en 0.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 - x^{n+1}.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Déduire de la question précédente* le développement limité de la fonction $x \to \dfrac{1}{1-x}$ à l'ordre n en 0.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Rappeler sans justification la dérivée de la fonction $x \to \arctan(x)$ et déduire de la question précédente un développement limité de la fonction $x \to \arctan(x)$ à l'ordre $2n+1$ en 0.

Exercice 3 Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe C^1. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \sup_{a\in\mathbb{R}} \{g(a) + (x-a)g'(a)\}.$$

Barème indicatif : Exercice 1 = 8 points, Exercice 2 = 9 points, Exercice 3 = 3 points.