Gestion de portefeuille

TD1. Eléments d'analyse des données financières

Excercice 1 Un investisseur dispose d'une richesse initiale V_0 qu'il investit (en totalité) dans les actifs financiers $S^1, \ldots, S^d$. Soit π_i la proportion de la richesse initiale V_0 alloué à l'actif i. L'investisseur projette de garder son portefeuille inchangé jusqu'à une date future $T > 0$, on note V_T la valeur de son portefeuille à cette date.
1. Exprimez la rentabilité du portefeuille $R_T^\pi := V_T^\pi / V_0 - 1$ en fonction des π_i et des rentabilités simples R_T^i de chacun des actifs S^i sur cette même période.

2. On suppose que le vecteur de rentabilité $R = (R^1, \ldots, R^d)'$ suit une loi $\mathcal{N}(M, \Sigma)$. Déterminer la loi de R^π.

Excercice 2 On considère un actif financier dont le prix à une date $t \geq 0$ est noté P_t. Soit R_t sa rentabilité simple et r_t sa log-rentabilité.
1. Rappelez les expressions de R_t et de r_t.

2. On suppose que r_t suit la loi $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$ avec $m, \sigma > 0$. Déterminez les expressions de $\mathbb{E}[R_t]$ et de $var(R_t)$ en fonction des paramètres m et σ.

On suppose que les log-rentabilité mensuelles de cet actif sont indépendantes, identiquement distribuées selon la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
3. Déterminez en fonction du prix présent P_0 et des log-rentabilités mensuelles, l'expression du prix au bout d'un an P_{12}.

4. Déterminez l'expression de $\mathbb{E}[P_{12}]$ et de $var(P_{12})$.

5. Donnez un intervalle de confiance à 95% pour le prix au bout d'un an P_{12}.

Excercice 3 On considère un actif dont le taux de rentabilité simple, R, est susceptible de dépendre de "l'environnement". Il existe deux régimes possibles pour ce dernier, se produisant avec les probabilités respectives p et $1 - p$. Dans le premier régime, la loi admet la densité f_1, la moyenne m_1 et la variance σ_1^2, dans le deuxième régime la loi est f_2, la moyenne m_2 et la variance σ_2^2. Plus précisemment on suppose que

$$R = XR_1 + (1 - X)R_2 \quad \text{avec} \quad R_1 \sim f_1,\ R_2 \sim f_2\ ,$$

et où X est une variable aléatoire indépendante de R_1 et de R_2, qui suit une loi de Bernouilli de paramète p.
1. Vérifiez que la moyenne m et la variance σ^2 de la rentabilité sont données par :

$$m = pm_1 + (1-p)m_2 \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \left(p\sigma_1^2 + (1-p)\sigma_2^2\right) + p(1-p)(m_1 - m_2)^2$$

Excercice 4 A partir de $N = 255$ observations des log-rentabilités journalières de l'action IBM on a calculé les statistiques empiriques suivantes :

moyenne	écart-type	skewness	excès kurtosis	minimum	maximum
-0.05 %	1.32%	-0.577	2.44	-5.86%	4.07%

(excès kurtosis = kurtosis -3)

1. On suppose que les log-rentabilité sont iid et suivent une loi gaussienne. Donnez un intervalle de confiance pour la skewness et la kurtosis à 95%.

2. Proposez une procédure permettant de tester la normalité de la distribution des log-rentabilités. Quelle est votre conclusion ?