UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

MATHÉMATIQUES DE LA MODÉLISATION ET DE LA DÉCISION - M1MMD

Gestion de Portefeuilles

Responsable du cours :

Idris Kharroubi

kharroubi@ceremade.dauphine.fr

2014-2015

Introduction

Ce cours a pour objectif de donner des éléments de réponse au problème suivant : étant donnée une somme d'argent que l'on décide d'investir sur le marché financier, quelle doit être la stratégie de placement ? Quels produits détenir et dans quelles proportions ?
Ce problème soulève un certain nombre de questions

- à quelles informations a-t-on accès sur les marchés financier ?
- sur quels critères peut-on se baser pour décider de la stratégie de placements ?
- à quels outils de modélisation économique, à quels outils mathématiques, informatiques, ... etc, peut-ont faire appel pour traiter ces questions ?

• ‘A quelles informations a-t-on accès ?’
Il s'agit tout d'abord de cerner les différents produits, ou les différentes classes de produits, qui forment le marché financier. On s'intéresse ensuite aux données disponibles relatives à ces différents produits, leur nature, leur pertinence, également les méthodes statistiques permettant de les analyser. Ces points font l'objet du Chapitre 1 de ce cours.

• Sur quels critères peut-on se baser pour décider de la stratégie de placement ?
A travers cette question nous pouvons aborder trois volets. Le premier concerne la politique de placement relative à l'investisseur, qu'il soit un agent particulier ou bien une institution. En effet, pour décider de la manière avec laquelle son portefeuille d'actifs financiers sera constitué ou mis à jour, il est essentiel pour l'investisseur d'énoncer clairement les objectifs qu'il veut atteindre tout aussi bien que les contraintes auxquelles il est soumis. C'est à la politique de placement qu'est consacré le Chapitre 2.
La politique de placement étant précisée, il est alors nécessaire d'établir un cadre formel dans lequel sera traité le problème de gestion de portefeuille. C'est le deuxième volet. Il s'agit d'établir un modèle pertinent pour le marché financier, de trouver un ‘bon’ critère pour le choix de portefeuille et de mettre en oeuvre les outils mathématiques, ou encore informatiques pour la résolution du problème. Dans ce sens, le Chapitre 3 présente la théorie moderne de gestion de portefeuille. On exposera dans ce chapitre la théorie de choix de

portefeuille de Markowitz, le modèle de l'équilibre des actifs financiers (MEDAF) et enfin, la théorie de l'évaluation par arbitrage (*arbitrage pricing theory* APT) dans le cadre des modèles factoriels.

Le Chapitre 4 sera consacré à des techniques classiques particulières d'Assurance de portefeuille. On présentera notamment des stratégies faisant intervenir des produits dérivés, ou encore les stratégies à coussins multiples et les stratégies stop-loss.

Table des matières

Chapitre 1

Marché financier et données financières

1.1 Marchés financiers

Le rôle des marchés financiers est de mettre en rapport des agents en quête de capitaux (l'état, les entreprises) et des agents disposant d'une épargne (les ménages, les investisseurs institutionnels tels que les compagnies d'assurance, les caisses de retraites, les gérants de fonds). Un agent en besoin de financement émets des titres financiers. En contrepartie de l'argent qu'il reçoit par l'acquéreur du titre, il doit assurer à ce dernier des bénéfices futurs (flux monétaires, droits, . . .) dans des conditions précisées.

1.1.1 Les produits du marché financier

On peut classer les différents produits du marché financier selon le tableau

Marché financier			
marché monétaire	marché des capitaux		produits dérivés
	obligations	actions	

Les instruments du marché monétaire. Ce sont des instruments d'emprunt à court terme pouvant être émis par le gouvernement, les banques, les investisseurs institutionnels ou les entreprises. Ils ont une maturité pouvant aller de 10 jours à 7 ans . Exemple : Bons du trésor.

Les produits du marché des capitaux. Ce sont des titres dont la maturité est supérieure à une année, voire non définie. On distingue d'une part les titres à revenus fixes, les obligations, qui donnent droit à une série de flux monétaire bien déterminés, et d'autre part les actions qui constituent une part du capital de l'émetteur et par suite donnent droit à la participation à ses bénéfices.
Les obligations : une obligation est un titre d'endettement. L'émetteur de l'obligation s'engage à rembourser à terme son porteur et à lui verser des intérêts à des dates spécifiées. Les obligations peuvent être émises par l'état, les collectivités locales, les établissement publics, les intermédiaires financiers et les sociétés.
Les actions : Une action est un titre de participation dans le capital social de son émetteur (société de capitaux). Dans sa forme traditionelle elle donne droit à la gestion de la société (une action = une voix dans les votes en assemblée générale), et aux bénéfices (sous forme de dividendes).

Les produits dérivés. Ce sont des produits dont la valeur dérive d'un ou de plusieurs titres financiers. Exemples : les options d'achat, les options de vente, les contrats à terme.

1.1.2 Fonctionnement des marchés financiers

Le fonctionnement des marchés financiers repose sur deux compartiments : le marché primaire et le marché secondaire.
Le marché primaire est à proprement parler le lieu de rencontre des agents en besoin de financement et des agents disposant d'épargne, puisqu'il s'agit du marché de l'émission des titres.
Le marché secondaire est le lieu où s'effectue l'échange des titres qui ont été déjà émis. Par le jeu de l'offre et la demande, les prix des produits financiers varient sur ce marché et peuvent, éventuellement, s'écarter considérablement des prix à l'émission.

Mécanisme des ordres en bourse. Pour pouvoir effectuer des opérations en bourse un agent doit être titulaire d'un compte chez un intermédiaire habilité. L'agent communique les opérations à l'intermédiaire qui se charge de présenter les ordres au marché. En contrepartie, l'intermédiaire touche une commission : ce sont les coûts de transactions.
Sur la bourse de Paris, le règlement des ordres peut se faire selon deux modalités. (i) La première est le système du comptant, le règlement et la livraison des titres se font instantanément et simultanément. Cette modalité constitue la norme. (ii) La deuxième modalité est le Service de Règlement Différé (SRD). Ce service permet un décalage entre le jour de la négociation et le jour du règlement ou de livraison des titres. Seule une sélection des valeurs boursières peuvent être négociées selon cette modalité.
Les ordres peuvent être des ordres d'achat, des ordres de vente de titres que l'agent détient, mais également des ordres de ventes à découvert : l'agent propose à la vente des titres qu'il ne possède pas. En pratique, l'intermédiaire en bourse se charge d'emprunter les titres chez un autre agent pour effectuer la vente. L'agent qui les a vendus à découvert doit acheter des titres, à une date future, pour remplacer ceux qui ont été empruntés. Les ventes à découvert ne peuvent pas être réalisées pour tous les titres. Sur la bourse de Paris elles ne concernent que les titres du SRD. De plus, certaines sociétés peuvent ne pas autoriser la vente à découvert

vert de leurs titres.

1.2 Eléments d'analyse des données financières

Dans l'objectif de gérer des portefeuilles de titres financiers, notre première attention porte sur les données relatives à ces titres. Les données accessibles sont bien entendu les prix actuels ou encore les historiques de prix ; mais n'oublions pas que le résultat des décisions d'investissement prises aujourd'hui dépendent des niveaux futurs des prix, lesquels ne peuvent être déterminés avec certitude. Face à cette incertitude, l'outil statistique est un outil naturel qui aide à

- comprendre à travers l'analyse des données historique le comportement des prix,
- proposer un modèle pour l'évolution des prix aidant à la prévision et à la quantification des risques.

Cette section présente quelques outils statistiques élémentaires pour une première analyse des séries financières.

1.2.1 Prix et rentabilités

Soit P_t le prix d'un actif financier au temps t, et D_t le flux payé par cet actif entre les dates $t-1$ et t. Nous noterons $p_t := \ln(P_t)$ le log-prix à la date t.

Définition 1.2.1 *La rentabilité simple entre la date t et la date $t-1$ est définie par*

$$R_t \quad := \quad \frac{P_t + D_t}{P_{t-1}} - 1 \; . \tag{1.2.1}$$

La log-rentabilité, appelée encore rentabilité géométrique, est définie par

$$r_t \quad := \quad \ln(1 + R_t) \; = \ln(P_t + D_t) - \ln(P_{t-1}) \; . \tag{1.2.2}$$

Remarque 1.2.1 Notons que si la rentabilité est proche de zéro, alors ces deux définitions sont (presque) équivalentes : $r_t = \ln(1 + R_t) \sim R_t$.

Soit $R_t(k)$, respectivement $r_t(k)$, la rentabilité simple, respectivement logarithmique, entre la date t et la date $t - k$. Si on ne tient pas compte des dividendes, elles sont données par

$$R_t(k) \;=\; (1 + R_t) \ldots (1 + R_{t-k+1}) - 1 \quad \text{et} \quad r_t(k) \;=\; r_t + \ldots + r_{t-k+1} \; . \tag{1.2.3}$$

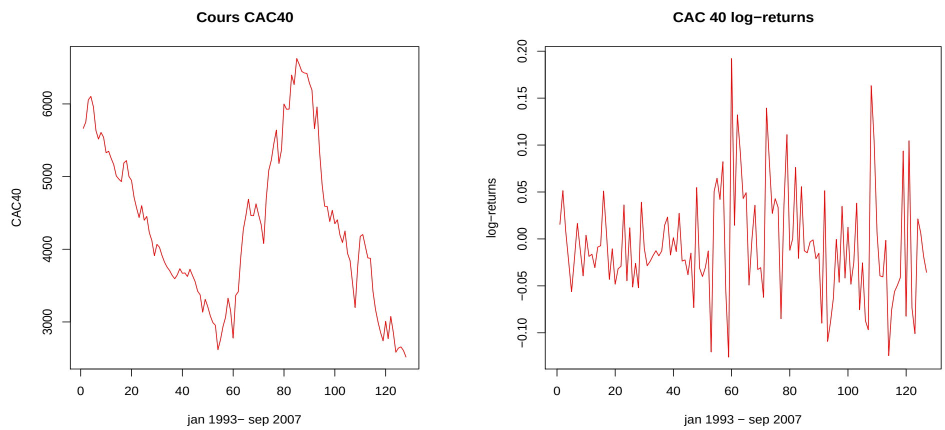
Pourquoi les rendements plutôt que les prix ? La figure 1.2.1 présente l'évolution du cours de clôture mensuel et les log-rentabilité mensuelles du CAC40 sur la période $02/1993-09/2007$. Chacune de ces séries temporelles est issue de l'observation des réalisations, a posteriori, d'un processus aléatoire. Si nous voulons l'utiliser à des fins de modélisation ou de prévision, nous devons faire attention aux deux points suivants.

(i) Le premier point est la mesure dans laquelle le 'processus générateur' de ces données reste invariable ou change d'une période à l'autre. Le fait de se servir d'observations du passé pour modéliser les réalisations du futur n'a de sens que si certaines propriétés de ce processus aléatoire demeurent constantes dans le temps. A cette idée correspond la notion statistique de <u>stationnarité</u>.

(ii) Le deuxième point est la façon avec laquelle une observation dépend des réalisations passées. C'est la notion d'<u>autocorrélation</u>. Plus la structure de dépendance est complexe, plus le traitement statistique est difficile.

L'analyse directe des séries de prix se révèle difficile car elles ne sont pas stationnaires et exhibent une forte corrélation. Les séries des rentabilités ont en général de meilleures propriétés statistiques.

FIGURE 1.1 – Cours et log-rentabilités du CAC 40 de janvier 1993 à septembre 2007.



1.2.2 Résumés empiriques

On considère une série temporelle $y = \{y_t, 1 \leq t \leq T\}$ à valeur dans $\mathbb{R}^d$, i.e. chaque observation $y_t = (y_t^1, \ldots, y_t^d)'$ est un vecteur de $\mathbb{R}^d$ avec $d \geq 1$.

Exemple 1.2.0 Soient $S^i, i = 1, \ldots, d$ des actifs du marchés financiers de prix respectifs $P_t^1, \ldots, P_t^d$. On s'intéresse pour chaque actif i à la série des log-rentabilités $\left\{r_t^i, 1 \leq t \leq T\right\}$, ou bien conjointement à la série $\left\{\begin{pmatrix} r_t^1 \\ \vdots \\ r_t^d \end{pmatrix}, 1 \leq t \leq T\right\}$.

Pour rendre compte de ses propriétés, on peut calculer des résumés empiriques synthétiques :

(i) Moyenne empirique

$$\hat{m}_T(y) = \bar{y}_T \quad := \quad \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t \tag{1.2.4}$$

(ii) Matrice de variance covariance empirique

$$\hat{\Sigma}_T(y) = (\hat{\sigma}_{ij,T}(y))_{1\leq i,j\leq d} := \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y}_T)(y_t - \bar{y}_T)' \tag{1.2.5}$$

$$\hat{\sigma}_{ij,T}(y) = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(y_t^i - \bar{y}_T^i)(y_t^j - \bar{y}_T^j) \tag{1.2.6}$$

qui est une matrice carrée symétrique semi-définie positive.

D'autres moments sont ainsi calculés. Notamment les moments centrés d'ordre 3 et 4 sont habituellement calculés pour chaque actif :

(iii) Coefficient empirique d'asymétrie (skewness empirique)

$$\hat{Sk}_T^i(y^i) := \frac{1}{T-1}\frac{1}{\hat{\sigma}_{i,T}^3(y^i)}\sum_{t=1}^{T}(y_t^i - \bar{y}_T^i)^3 \quad \text{où} \quad \hat{\sigma}_{i,T}^2(y^i) = \hat{\sigma}_{ii,T}(y) \tag{1.2.7}$$

Une loi normale est symétrique, par suite son moment centré d'ordre 3 est nul. Une valeur positive du coefficient d'asymétrie révèle une distribution plus étendue vers les valeurs positives, et une valeur négative indique une distribution plus étendue vers les valeurs négatives. Ce coefficient correspond à la valeur empirique du coefficient d'asymétrie (skewness) $Sk(.)$ défini pour une variable aléatoire X par

$$Sk(X) = \frac{\mathbb{E}\big[\big(X - \mathbb{E}[X]\big)^3\big]}{\mathbb{E}\big[\big(X - \mathbb{E}[X]\big)^2\big]^{\frac{3}{2}}} .$$

(iv) Coefficient empirique d'aplatissement (kurtosis empirique)

$$\hat{K}_T^i(y^i) := \frac{1}{T-1}\frac{1}{\hat{\sigma}_{i,T}^4(y^i)}\sum_{t=1}^{T}(y_t^i - \bar{y}_T^i)^4 \tag{1.2.8}$$

Pour une loi normale la kurtosis vaut 3. On se réfère à ce chiffre pour juger de l'importance des queues d'une distribution. On parle de

- distribution **leptokurtique** lorsque la kurtosis est supérieure à 3 : queues plus épaisses que celles de la loi normale,

– distribution **platykurtique** lorsque la kurtosis est inférieure à 3 : queues plus aplaties que celles de la loi normale.

Ce coefficient correspond à la valeur empirique du coefficient d'aplatissement (kurtosis) $K(.)$ défini pour une variable aléatoire X par

$$K(X) \quad = \quad \frac{\mathbb{E}\big[\big(X - \mathbb{E}[X]\big)^4\big]}{\mathbb{E}\big[\big(X - \mathbb{E}[X]\big)^2\big]^2} \ .$$

1.2.3 Lois statiques gaussiennes pour les rentabilités

Soit P_t les vecteurs prix de d actifs financiers pour $0 \leq t \leq T$. On considère les rentabilités simples R_t et les log-rentabilités r_t associées. Les modèles les plus simples pour les prix reposent sur des hypothèses de lois gaussiennes.

On rappelle dans la suite les résultats de base sur les vecteurs gaussiens.

Définition 1.2.2 *Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. On note $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ la loi de probabilité dont la densité est donnée par*

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \ , \qquad x \in \mathbb{R} \ . \tag{1.2.9}$$

Une variable aléatoire réelle dont la loi est $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est dite gaussienne.
Un vecteur aléatoire $X = (X^1, \ldots, X^d)'$ est dit gaussien ssi pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, le produit scalaire $a \cdot X$ est une variable gaussienne. Dans ce cas, on note $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, la loi gaussienne de moyenne $\mu := \mathbb{E}\,[X]$ et de matrice de variance-covariance $\Sigma = \mathbb{E}[(X - \mu)(X-\mu)']$

Remarque 1.2.2 Si un vecteur $X = (X^1, \ldots, X^d)$ est gaussien, alors chacune de ses composantes est une variable aléatoire gaussienne. La réciproque n'est pas vraie

Proposition 1.2.1 *Soit $X = (X^1, \ldots, X^d)'$ un vecteur gaussien de moyenne $\mu \in \mathbb{R}^d$ et de matrice de variance-covariance Σ. Si Σ n'est pas inversible alors le vecteur gaussien X*

n'admet pas de densité par rapport à la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$. Sinon, il admet une densité qui s'écrit

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{det\Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\right) \;, \quad x \in \mathbb{R}^d \,. \tag{1.2.10}$$

Réciproquement, si un vecteur X admet une densité donnée par (1.2.10)*, alors X est un vecteur gaussien de moyenne μ et de matrice de variance-covariance Σ.*

Proposition 1.2.2 *Soit (X^1, X^2) un vecteur gaussien. Les variables X^1 et X^2 sont indépendantes ssi $cov(X^1, X^2) = 0$.*

Proposition 1.2.3 *Soit $X_1, \ldots, X_n$ une suite de variables aléatoires i.i.d qui suivent la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, avec $m \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ et $\bar{S}_n := \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}$ sont indépendantes et vérifient*

$$\frac{n-1}{\sigma^2}\bar{S}_n^2 \sim \chi^2_{n-1} \quad \textit{et} \quad \frac{\bar{X}_n - m}{\bar{S}_n/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \;, \tag{1.2.11}$$

où χ^2_{n-1} et t_{n-1} désignent respectivement les lois du χ^2 et de Student à $n-1$ degrès de libertés.

Nous allons maintenant utiliser ces résultats sur les lois gaussiennes en utilisant les hypothèses suivantes.

Hypothèse A Les rentabilités simples $R_1, \ldots, R_T$ sont indépendantes, identiquement distribuées, avec $R_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$.

Exercice 1.2.1 Un investisseur dispose d'une richesse initiale V_0 qu'il investit dans les actifs financiers $S^1, \ldots, S^d$. Soit π^i la proportion de la richesse initiale V_0 allouée à l'actif i. L'investisseur projette de garder son portefeuille inchangé jusqu'à une date future $T > 0$, on note V_T la valeur de son portefeuille à cette date.
Exprimez la rentabilité du portefeuille $R^\pi := V_T/V_0 - 1$ en fonction des π^i et des rentabilités simples $R^i := R^i_T(T)$ de chacun des actifs S^i. Quelle est la loi de R^π sous l'Hypothèse A ?

Hypothèse B Les log-rentabilités $r_1, \ldots, r_T$ sont indépendantes, identiquement distribuées, avec $r_1 \sim \mathcal{N}(m, \Sigma)$.

Exercice 1.2.2 Déterminez sous l'hypothèse B les expressions de la moyenne $\mathbb{E}[R_t^i]$ et de la variance $var(R_t^i)$ de la rentabilité simple R_t^i.
Quelle est, sous l'hypothèse B, la loi de $r_t^i(k)$?

Hypothèse C Modèle de marche aléatoire pour les log-rentabilités

$$r_t \;=\; r_{t-1} + \mu + \epsilon_t \;, \tag{1.2.12}$$

où (ϵ_t) est une suite de variables i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$.

Exercice 1.2.3 On suppose que les rentabilités vérifient l'hypothèse C. On suppose de plus que $\Sigma = \sigma^2 Id$ avec $\sigma > 0$. Déterminez l'expression de P_T en fonction de P_0, μ et des ϵ_t. Calculer $\mathbb{E}[P_T]$ et $var(P_T)$.

1.2.4 Tester l'hypothèse de normalité

Soit X une variable aléatoire et $(x_1, \ldots, x_n)$ une série d'observations de réalisations de cette variable. Nous présentons dans ce qui suit des méthodes simples pour tester la normalité de la loi de X.

Histogrammes. Une estimation de la densité de X peut être obtenue à partir d'un histogramme des observations $(x_1, \ldots, x_n)$ d'un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de X.
Un histogramme glissant de pas $h > 0$ et de noyau K est obtenu en posant

$$\hat{f}_{h,n}(x) \quad := \quad \frac{1}{nh} \sum_{k=1}^{n} K\Big(\frac{X_i - x}{h}\Big) \qquad x \in \mathbb{R} \;, \tag{1.2.13}$$

où K est une fonction positive telle que $\int_{\mathbb{R}} K(\xi) d\xi = 1$. Lorsque $h \to 0$ et $nh \to \infty$, c'est un estimateur asymptotiquement convergeant avec

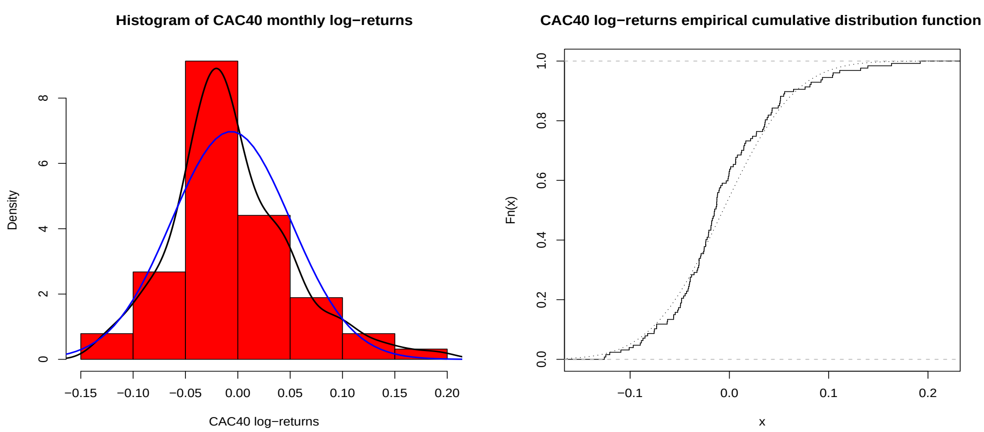
$$\sqrt{nh}\left(\hat{f}_{h,n}(x) - f(x)\right) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad \mathcal{N}\left(0, f(x) \int_{\mathbb{R}} K^2(\xi) d\xi\right) \;. \tag{1.2.14}$$

Exemples de Noyaux

noyau rectangulaire : $K(\xi) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{|\xi|\leq 1}$,

noyau gaussien : $K(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)$.

FIGURE 1.2 –



Tests visuels. Un test graphique de normalité est donné par le diagramme quantile-quantile, $qq - plots$ qui est la représentation graphique de

$$\left\{ \left(\Phi\left(\frac{k}{n}\right), X_{k:n} \right) \ , \ k = 1, \ldots, n \right\} \ , \tag{1.2.15}$$

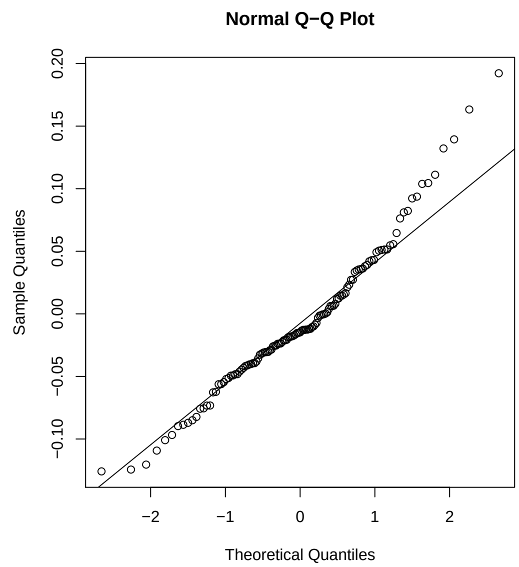
où $X_{1:n}, \ldots, X_{n,n}$ est la *statistique d'ordre* de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ et Φ est la fonction quantile de la distribution de référence. Ainsi, pour obtenir ce diagramme,

1. on commence par ordonner les observations de l'échantillon par ordre croissant : $x_{1:n} \leq \cdots \leq x_{n:n}$.

2. Ensuite, les observations sont reportées sur un graphique. L'observation de rang k est représentée par le point $\left(\Phi(\frac{k}{n}), x_{k:n}\right)$, c'est à dire le point d'abscisse le quantile de la distribution de référence définie par l'observation $x_{i:n}$ et d'ordonnée $x_{k:n}$.

Si les observations correspondent parfaitement aux quantiles de la distribution de référence, les points du diagramme seraient (asymptotiquement) alignés sur la première bissectrice et équidistants.

FIGURE 1.3 – Exemple de diagramme *qq-plots*.



Utilisation des moments d'ordre 3 et 4. La skewness et la kurtosis qui sont définies, respectivement, à partir du moment d'ordre 3 et du moment d'ordre 4 d'une distribution, fournissent un test de normalité. En effet, si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors la skewness et la kurtosis empiriques associées à un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ vérifient pour $n \to \infty$

$$\hat{S}k_n(X) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{6}{n}\right) \quad \text{et} \quad \hat{K}_n(X) \sim \mathcal{N}\left(3, \frac{24}{n}\right) \tag{1.2.16}$$

Tests de Bera & Jarque : si la distribution suit la loi normale, alors la statistique

$$BJ_T \quad := \quad \frac{T}{6}\hat{S}_T^2 + \frac{T}{24}(\hat{K}_T - 3)^2 \tag{1.2.17}$$

suit asymptotiquement une loi du χ^2 à deux degrés de liberté.

$$BJ_T \geq \chi^2_{1-\alpha}(2) \implies \text{on rejette l'hypothèse } H_0 \text{ de normalité au seuil } \alpha.$$

1.2.5 Quelques faits stylisés

On désigne par faits stylisés des propriétés statistiques communément exhibées par la plupart des actifs financiers. Il est important de savoir si les modèles statistiques choisis pour modéliser les données financières permettent de rendre compte de ces faits stylisés.

Absence d'auto-corrélation des rendements : les rentabilités sont imprévisibles et exhibent une très faible autocorrélation, voire une absence d'autocorrélation. Ceci confère aux séries des rentabilités un aspect de marche aléatoire.

Queues épaisses : les distributions des rentabilités sont leptokurtiques : les queues des distributions sont plus épaisses que celles d'une loi Gaussienne.

Asymétrie négative : le biais vers les valeurs négatives implique que les pertes sévères ne sont pas aussi rares que pour une loi gaussienne.

le 'klustring' de volatilité : on observe que de longues périodes où la variance des rentabilités est haute se succèdent à de longues périodes où elle est réduite. Cette propriété n'est pas cohérente avec un modèle de rentabilités iid.

les 'time patterns' : les rendements exhibent systématiquement des hausses ou des baisses à des périodes bien précises de l'année, du mois, de la semaine ou du jour. Par exemple, on observe une hausse des rendements durant les trente dernières minutes de la journée, on a remarqué que le lundi les rendements sont beaucoup moins élevés que les autres jours de la semaine, ou encore plusieurs études ont révélé que les rendements au mois de janvier sont sensiblement plus élevés que les autres mois. Cela suggère une certaine cyclicité des rendements qui contredit l'hypothèse d'indépendance et d'identique distribution des rentabilités au cours du temps.

1.3 De l'efficience des marchés financiers

La notion d'efficience du marché financier, mise en évidence par FAMA dans les années 60, joue un rôle fondamental dans la théorie financière moderne. Dire que le marché est efficient c'est dire que *le prix courant d'un titre incorpore toute l'information disponible*, c'est à dire que *'la prévision optimale du rendement d'un actif basée sur l'ensemble d'information disponible est égale au rendement d'équilibre du titre'*. Ainsi, dans un marché efficient les prix constituent des 'signaux fiables' sur lesquels on peu b,tir les décisions d'investissement.

Définition 1.3.1 *Un marché est dit efficient par rapport à un certain ensemble d'information $\mathbb{F}$, si toute l'information de $\mathbb{F}$ disponible à la date t, notée $\mathcal{F}_t$, est parfaitement reflétée dans son prix P_t.*

Pour préciser la notion d'information, Roberts (1967) distingue

– efficience faible : $\mathbb{F}$ est constituée par l'historique des prix passés. Si le marché est faiblement efficient alors toute l'analyse technique (qui consiste en l'analyse de prix ou de fonctions de prix passés) est inutile à l'investisseur.

– efficience semi-forte : $\mathbb{F}$ est constituée par toute l'information connue publiquement par tous les acteurs du marché (information publique). Si l'efficience semi-forte est vérifiée par le marché, alors toute l'analyse fondamentale (analyse basée sur l'information publique) est inutile à l'investisseur.

– efficience forte : $\mathbb{F}$ est constituée par toute l'information connue par au moins un acteur (information publique et privée). Si le marché vérifie l'efficience forte alors il n'existe aucune possibilité de gain qui reste inexploitée.

Si le marché est efficient, alors

- les prix reflètent les espérances des revenus futurs auxquels il donnent droit,

- tous les évènements anticipés sont déjà inclus dans les prix, par suite *seuls les évènements imprévisibles peuvent les influencer*. Pour traduire formellement cette hypothèse nous avons besoin d'introduire la notion de filtration.

Définition 1.3.2 *Un filtration* $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est une suite croissante de tribus, i.e.* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ *pour* $0 \leq s \leq t$.
Un processus $\{X_t, t \geq 0\}$ *défini sur l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est une martingale par rapport à la filtration* $\mathbb{F}$ *ssi* $\mathbb{E}\left[|X_t|\right] < \infty$ *pour tout* $t \geq 0$ *et* $\mathbb{E}\left[X_t | \mathcal{F}_s\right] = X_s$ *pour tout* $0 \leq s \leq t$.

On trouve dans la littérature plusieurs formulations possibles pour l'hypothèse d'efficience parmi lesquelles :
Le prix est une martingale, c'est à dire $\mathbb{E}\left[P_{t+1} | P_t, \ldots, P_0\right] = \mathbb{E}\left[P_{t+1} | \mathcal{F}_t\right] = P_t$
Exemple : modèle de marche aléatoire : $P_{t+1} = P_t + \varepsilon_t$, où $\{\varepsilon_t\}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. avec $\mathbb{E}\left[\varepsilon_t\right] = 0$ et $var(\varepsilon_t) = \sigma^2$
Les log-rentabilités sont i.i.d, c'est à dire $\{r_t = p_t - p_{t-1}\}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d.
Le marché vérifie l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage, i.e. il existe une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ (équivalente à la probabilité historique) telle que les prix, actualisés par le taux court sans risque, soient des martingales : $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[P_{t+1}/r_{0,t+1} | \mathcal{F}_t\right] = P_t/r_{0,t}$.

Nombre de travaux ont eu pour objet de tester l'efficience des marchés financiers. Notons que pour tester l'hypothèse d'efficience, il faut être en mesure de déterminer le 'prix correct', c'est à dire, qu'il faut disposer d'un modèle d'équilibre. Ainsi quand on teste l'efficience, on teste en même temps le modèle de détermination du prix d'équilibre. Certains tests formels portent sur la prédictibilité des taux de rentabilité des actifs. On trouve également des tests portant sur la (vitesse de) réaction des prix à la révélation de nouvelle informations. On peut également étudier des faits stylisés tels que les 'time patterns', les effets de taille, . . . , et analyser leur compatibilité avec l'hypothèse d'efficience.

Quelques références :

1. Tsay, Ruey S. (2005), *Analysis of financial time series*, Wiley-interscience.
2. Taylor, Stephen (1986), *Modelling Financial time series*, John Wiley & Sons Ltd.
3. Fama, Eugène F. (1965), *Random Walks in Stock Market Prices*, Financial Analysts Journal.

La bibliothèque de dauphine permet d'accéder à un certain nombre de bases de données financières, vous pouvez consulter :

4. www.bu.dauphine.fr/scd/formation/m1/financieres.ppt

et pour une introduction au logiciel *R*

5. `http://cran.r-project.org/doc/contrib/Paradis-rdebuts_fr.pdf`

Chapitre 2

Politique de gestion de portefeuille

2.1 Enoncer la politique de placement

La première étape du processus de gestion de portefeuille, pour un investisseur institutionnel tout aussi bien que pour un investisseur individuel, consiste à établir clairement sa *politique de placement*. Il s'agit de fixer :

– les objectifs de rentabilité souhaités au bout de l'horizon d'investissement,
– les niveaux de risque qui peuvent être tolérés,
– les contraintes des portefeuille et les stratégies admissibles.

Le terme *politique de placement* désigne par ailleurs le document écrit détaillant ces différents éléments. Le gestionnaire du portefeuille est tenu de le produire et de le réviser périodiquement.

Enoncer clairement sa politique de placement permet à l'investisseur de (i) choisir le 'style de gestion' qui convient le mieux à ces objectifs de rentabilité et de risque, (ii) garantir tout au long de l'horizon d'investissement la cohérence des décisions de révision du portefeuille, enfin (iii) d'évaluer la performance des stratégies de gestion appliquées.

Nous détaillons dans ce qui suit les éléments déterminants dont un investisseur se doit de tenir compte pour établir sa politique de placement.

2.2 Déterminants de la politique de placement

2.2.1 Les objectifs de placement

La définition des objectifs de placement pour un investisseur résulte d'un arbitrage rendement–risque. Compte tenu du caractère aléatoire des résultats des instruments financiers, les possibilités de gains qu'ils peuvent produire sont indissociables des possibilités de perte. Ainsi, un énoncé tel que 'atteindre un rendement maximal' ou 'garantir un risque minimal' occulte l'une des deux faces du problème. Un 'bon' énoncé d'objectif est du type 'atteindre au moins une rentabilité de 30% en supportant, au plus, une perte de 10% du capital'.

Le rendement. Le niveau de rendement recherché dépend du type d'investisseur et de son secteur d'activité.
– Dans le cas d'un investisseur individuel le cycle de vie est un déterminant essentiel. Par exemple, l'entrée dans la vie active correspond à un faible patrimoine financier et à un long horizon de placement, l'investisseur favorise alors des placements à rendements relativement élevés (quitte à prendre plus de risques) ; par contre, la retraite correspond une phase où l'individu vit des revenus de ses placements ou de ses fonds de retraite et où son horizon de placement est relativement court, il favorise alors des placements à rendements réguliers et de faible risque.
– Dans le cas d'une institution, la détermination du niveau de rendement à atteindre tient compte des flux monétaires engendrés par son activité, comme elle tient compte de l'équilibre actif/passif. Elle peut dépendre également de l'âge moyen de ses employés.

Le risque. Il peut être défini de manière quantitative en ayant recours à des mesures statistiques telle que l'écart-type ou les quantiles (notion de valeur à risque VaR). La tolérance pour le risque est en général d'autant plus grande que la santé financière de l'investisseur est solide et son horizon d'investissement est long. Notons que pour les investisseurs individuels, des éléments autres que quantitatifs influencent son attitude vis à vis du risque. Dans la pratique, les gestionnaires de portefeuilles peuvent recourir à des systèmes de scores attribués à travers des questionnaires pour classer les individus selon leur attitude par rapport au risque.

2.2.2 Les contraintes de placement

Les décisions d'allocation de portefeuille sont liés par différents types de contraintes.

Les contraintes réglementaires. Il s'agit de dispositions légales qui limitent les instruments ou les secteurs du marché financier auxquels un investisseur peut avoir accès. Certains investisseurs institutionnels tels que les fonds de pension ne peuvent pas, par exemple, investir dans des classes données de produits dérivés jugés trop risqués. Des contraintes légales peuvent porter également sur le niveau de risque admissible ou le degrés de diversification du portefeuille.

Les règles de taxation. C'est un élément qui dépend du statut de l'investisseur et du type de produits considérés. Les taxes peuvent constituer une partie non négligeable des coûts des décisions d'allocation ou de révision de portefeuille.

Les contraintes de liquidité. Elles sont liées aux besoins en fonds qui peuvent survenir de manière plus ou moins périodique. L'investisseur doit être assuré qu'une partie des ces placements est suffisamment flexible pour pouvoir, au besoin, satisfaire ses besoins en liquidités.

Chapitre 3

Théorie moderne de portefeuille

3.1 Théorie de portefeuille de Markowitz

"The process of selecting a portfolio may be divided in two stages. The first stage starts with observation and experience and ends with beliefs about the future performances of available securities. The second stage starts with the relevant beliefs about future performances and ends with the choice of portfolio"   Harry Markowitz

3.1.1 Modèle du marché financier

On considère un marché financier formé par d actifs risqués S^i, $i = 1, \dots, d$, et un actif sans risque S^0 qui peut être assimilé à un placement bancaire à un taux sans risque. Le prix de l'actif i à une date $t \geq 0$ est noté S^i_t. On suppose que ces actifs sont parfaitement divisibles et qu'ils ne sont soumis à aucun coûts de transaction ni à aucune taxe.

Un agent décide d'investir une richesse initiale, w_0, dans ce marché financier sur un horizon de temps T.

On se concentre tout au long de ce chapitre sur un modèle simple à une période. Les agents ont accès à ce marché seulement à deux dates : le présent $t = 0$ et une date future $t = T$ avec $T > 0$. A la date $t = 0$ un investisseur forme, à partir de sa dotation initiale, un portefeuille d'actifs et le conserve jusqu'à la date $t = T$. A la date $t = T$ l'investisseur consomme la totalité de sa richesse. L'incertitude concernant le futur (date T) est modélisée par un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour tout $i = 1, \ldots, d$, S^i_T est une variable aléatoire, et on introduit

$$R^i := \frac{S^i_T}{S^i_0} - 1, \quad i = 0, \ldots, d \quad \text{et le vecteur} \quad R := \left(R^1, \ldots, R^d\right)' \tag{3.1.1}$$

et on note

$$m^i := \mathbb{E}[R^i], \ \ M := \mathbb{E}[R] = \left(m^1, \ldots, m^d\right)', \tag{3.1.2}$$

$$\sigma^{ij} := cov(R^i, R^j), \ \ \Sigma = \left(\sigma^{ij}\right)_{1 \le i,j \le d} . \tag{3.1.3}$$

Hypothèse 1 : On suppose que la matrice de variance-covariance Σ est définie positive.

Remarque 3.1.1 Le fait de supposer que Σ est définie positive ne réduit pas la généralité du modèle. En effet, supposons que Σ ne soit pas définie positive. Il existe alors $\xi \in \mathbb{R}^d$ tel que $\xi \neq 0$ et $\xi'\Sigma\xi = 0$. Un tel vecteur non nul ξ vérifie :

$$var(\xi' R) = \xi'\Sigma\xi = 0$$

ce qui implique que la variable aléatoire $\xi' R$ est égale à une constante x presque sûrement

$$\xi^1 R^1 + \cdots + \xi^d R^d - x = 0 \quad \text{avec} \quad \xi \neq 0 \ .$$

On déduit que si Σ n'est pas définie positive, alors la rentabilité de l'un des actifs risqués peut être obtenue comme combinaison linéaire des rentabilités des autres actifs sur le marché, on peut alors le considérer comme 'redondant'.

Remarque 3.1.2 La rentabilité simple de l'actif sans risque R^0 est une constante.

Stratégies d'investissement. Dans ce modèle, une stratégie d'investissement peut être décrite par un vecteur $\pi = \left(\pi^1, \ldots, \pi^d\right) \in \mathcal{A}$ où

– π^i est la proportion de la richesse initiale w_0 investie dans l'actif i, pour $i = 1, \ldots, d$,

– ainsi, en tenant compte de la **contrainte budgétaire**, $\pi^0 := 1 - \sum_{i=1}^d \pi^i$ représente la proportion de la richesse w_0 allouée à l'actif sans risque,

– $\mathcal{A}$ est l'ensemble des portefeuilles admissibles. C'est une partie de $\mathbb{R}^d$ qui tient compte des contraintes de portefeuille.

Exemples. • Si aucune contrainte de portefeuille n'est imposée, notamment les ventes à découvert sont autorisées pour tous les actifs, alors $\mathcal{A} = \mathbb{R}^d$.

• Si on interdit les ventes à découvert pour tous les actifs, alors

$$\mathcal{A} \quad = \quad \left\{\pi \in [0,1]^d, \ \sum_{i=1}^d \pi \in [0,1]\right\} .$$

• Si on borne les proportions allouées à chacun des actifs alors

$$\mathcal{A} \quad = \quad \prod_{i=1}^d [-l^i, L^i] \ ,$$

avec $l^i, L^i \in \mathbb{R}_+$.

Valeur terminale et rentabilité d'un portefeuille. On note $W_t^{w,\pi}$ la valeur à la date t d'un portefeuille formé à partir de la richesse initiale w et en suivant la stratégie d'allocation décrite par le vecteur $\pi \in \mathcal{A}$. On a alors $W_0^{w,\pi} = w$ et

$$\begin{aligned} W_T^{w,\pi} &= w\left(1 - \sum_{i=1}^d \pi^i\right)(1+R^0) + \sum_{i=1}^d w\pi^i(1+R^i) \\ &= w\left(1 + R^0 + \pi'(R - R^0\mathbf{1})\right) \ , \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

où $\mathbf{1}$ est le vecteur $\mathbf{1} = (1, \cdots, 1)'$ de $\mathbb{R}^d$. Les expressions de l'espérance et de la variance de la richesse terminale sont données par

$$\mathbb{E}\left[W_T^{w,\pi}\right] \quad = \quad w\left(1 + R^0 + \pi'(M - R^0\mathbf{1})\right)$$

et

$$var(W_T^{w,\pi}) \quad = \quad w^2 \pi' \Sigma \pi \; .$$

On voit que la rentabilité (simple) de ce portefeuille ne dépend pas de la richesse initiale, mais qu'elle dépend uniquement de l'allocation π. On la note alors R^π et son expression est donnée par

$$R^\pi \;:=\; \frac{W_T^{w,\pi}}{W_0^{w,\pi}} - 1 \quad = \quad R^0 + \pi' \left(R - R^0 \mathbf{1} \right) \; . \tag{3.1.5}$$

L'espérance et la variance de la rentabilité associée à l'allocation de portefeuille π sont égales à

$$\mathbb{E}\left[R^\pi\right] = R^0 + \pi' \left(M - R^0 \mathbf{1} \right) \; , \; var(R^\pi) = var(\pi' R) = \pi' \Sigma \pi \tag{3.1.6}$$

Le problème de l'investisseur. est de choisir parmi l'ensemble des allocations possibles de portefeuille, $\mathcal{A}$, un portefeuille π 'optimal'. Mais, selon quel critère ?

L'idée de Markowitz est que l'investisseur exprime ses préférences sur l'ensemble des portefeuilles en tenant compte du couple rendement-risque et ce en examinant deux paramètres : l'espérance-la variance du gain associé à chaque portefeuille. Dans ce qui suit nous commenņons par un rappel sur le problème de choix en environnement incertain et nous verrons dans quelle mesure se justifie le recours à un critère moyenne-variance pour le choix de portefeuille.

3.1.2 Choix en présence de risque : théorie de l'espérance d'utilité

Comment exprimer ses préférences entre différentes perspectives aléatoires ?

La théorie de von Neumann Morgenstern (1944), en adoptant une axiomatique simple pour caractériser la rationalité des choix des individus en présence de risque, aboutit au critère de l'espérance d'utilité comme réponse à cette question. Ainsi, les préférences d'un agent sur un ensemble de perspectives aléatoires $\tilde{\mathcal{A}}$ sont rationnelles s'il existe une fonction d'utilité u telle que pour tout $X, Y \in \tilde{\mathcal{A}}$

$$X \text{ est préféré à } Y \quad \text{ssi} \quad \mathbb{E}\left[u(X)\right] \geq \mathbb{E}\left[u(Y)\right] \ .$$

Supposons que $\tilde{\mathcal{A}}$ soit un ensemble de variables aléatoires réelles définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Un élément $X \in \tilde{\mathcal{A}}$ représente le gain (monétaire) associé à un(e) projet/stratégie donné(e). Supposons que les préférences d'un agent sur $\tilde{\mathcal{A}}$ soient décrites par une fonction d'utilité vNM $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante.

Définition 3.1.1 *(i) On appelle équivalent certain de $X \in \tilde{\mathcal{A}}$, et on note $ec^u(X)$, la valeur certaine (i.e le réel) équivalent pour l'agent à X i.e. $u(ec^u(X))$ $= \mathbb{E}\left[u(X)\right]$.*

(ii) On appelle prime de risque associée à X la quantité $\Pi^u(X) := \mathbb{E}[X] - ec^u(X)$.

La notion de prime de risque permet de caractériser le comportement de l'agent vis à vis du risque : une prime de risque positive indique que l'agent est prêt à renoncer à X pour un montant certain $ec^u(X)$ qui est inférieur au gain espéré de X. De manière générale,

- Si $\Pi^u \geq 0$ l'agent est *averse au risque*,
- si $\Pi^u \leq 0$ l'agent est *tolérant pour le risque*,
- si $\Pi^u = 0$ l'agent est *neutre vis à vis du risque*.

Proposition 3.1.1 *L'agent est*

- *averse au risque si u est concave,*
- *tolérant pour le risque si u est convexe,*
- *neutre vis à vis du risque si u est affine.*

Si la fonction d'utilité u est concave, strictement croissante et deux fois dérivable, alors on peut définir *l'indice absolu d'aversion pour le risque*

$$ra^u : x \in \mathbb{R} \quad \mapsto \quad -\frac{u''(x)}{u'(x)} \,. \tag{3.1.7}$$

Proposition 3.1.2 *Soient u^1 et u^2 deux fonctions d'utilité deux fois différentiables, strictement concaves et croissantes, alors $ra^{u^1} \geq ra^{u^2}$ ssi $\Pi^{u^1} \geq \Pi^{u^2}$. On peut alors dire que l'agent dont la fonction d'utilité est u^1 est plus averse que l'agent dont la fonction d'utilité est u^2.*

3.1.3 Critère de moyenne-variance et portefeuilles efficients

Comme nous l'avons cité plus haut, dans la théorie de choix de portefeuille de Markowitz, les préférences entre les différents portefeuilles sont définies uniquement à partir de l'espérance et de la variance de leurs rentabilités.

Hypothèse M (Markowitz) Les préférences d'un agent sur l'ensemble des portefeuilles admissibles $\mathcal{A}$ sont caractérisées par une fonction d'utilité U qui dépend de l'espérance et de la variance

$$\begin{gathered} \pi^1 \text{ est préféré à } \pi^2 \text{ ssi} \\ U\left(\mathbb{E}[W_T^{w,\pi^1}], var(W_T^{w,\pi^1})\right) \geq U\left(\mathbb{E}[W_T^{w,\pi^2}], var(W_T^{w,\pi^2})\right), \end{gathered}$$

avec U croissante par rapport à son premier argument (la moyenne), et décroissante par rapport à son deuxième argument (la variance).

Selon cette hypothèse, résoudre le problème de sélection de l'allocation de portefeuille optimale revient à résoudre

$$\sup_{\pi \in \mathcal{A}} U\left(\mathbb{E}[W_T^{w,\pi}], var(W_T^{w,\pi})\right) \,. \tag{3.1.8}$$

Critère de moyenne-variance et hypothèse de l'espérance d'utilité. *Dans quelle mesure l'hypothèse M est-elle compatible avec un cadre d'espérance d'utilité ?*

Selon l'hypothèse M, un agent utilise uniquement les moments d'ordre 1 et 2 pour comparer les différents portefeuilles, en omettant les autres propriétés statistiques des rentabilités telles que la symétrie (moment d'ordre 3) ou l'épaisseur des queues des distributions (moment d'ordre 4), ... etc. Cette hypothèse restrictive est compatible avec le cadre de la théorie de l'espérance d'utilité dans certains cas particuliers. Nous en citons deux.

<u>Fonction d'utilité quadratique</u>. Supposons que la fonction d'utilité vNM soit une fonction quadratique, c'est à dire de la forme $u(x) = x - \lambda x^2$. Dans ce cas

$$\mathbb{E}\left[u(W_T^{w,\pi})\right] = \mathbb{E}[W_T^{w,\pi}]\left(1 - \lambda\mathbb{E}[W_T^{w,\pi}]\right) - \lambda var(W_T^{w,\pi})\,.$$

Si on suppose en plus que $\mathbb{E}[|W_T^{w,\pi}|]$ est bornée par $\frac{1}{2\lambda}$ (c'est par exemple le cas si les rentabilités R^i des différents actifs sont bornées et les portefeuilles π sont contraints à être choisis dans un domaine borné), alors, on se retrouve dans le cadre de l'hypothèse M. Il faut cependant remarquer qu'une fonction d'utilité vNM quadratique peut poser problème : (i) elle n'est pas croissante sur tout son domaine, ce qui implique qu'au delà d'un certain niveau de richesse un agent préfère avoir moins de richesse que plus de richesse, (ii) elle implique que l'agent est tout aussi averse aux déviations qui sont en-dessous de la moyenne, que celle qui sont au-dessus.

<u>Normalité des rentabilité</u>. Nous avons vu dans le Chapitre 1 que la loi normale peut être considérée comme une première approximation des rentabilités des actifs (Hypothèse A). Dans ce cas, pour chaque portefeuille π, la richesse $W_T^{w,\pi}$ est gaussienne, et sa distribution est parfaitement caractérisée par sa moyenne et sa variance. Quelle que soit la fonction d'utilité vNM u,

$$\mathbb{E}\left[u(W_T^{w,\pi})\right] = \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x)}{\sqrt{2\pi(\sigma^\pi)^2}} \exp\left\{-\frac{(x-m^\pi)^2}{2(\sigma^\pi)^2}\right\} \quad = \quad U(m^\pi, (\sigma^\pi)^2)$$

où $m^\pi = \mathbb{E}[W_T^{w,\pi}]$ et $(\sigma^\pi)^2 = var(W_T^{w,\pi})$.

Notion de portefeuille efficient.

Définition 3.1.2 *Soit π^1 et π^2 deux portefeuilles de $\mathcal{A}$. On dit que π^1 et préférable à π^2 au sens du critère de moyenne variance, et on note $\pi^1 \succeq_{mv} \pi^2$ ssi*

$$\mathbb{E}\left[R^{\pi^1}\right] \geq \mathbb{E}\left[R^{\pi^2}\right] \quad et \quad var(R^{\pi^1}) \leq var(R^{\pi^2}) \; .$$

La relation $\succeq_{mv}$ définit un préordre sur l'ensemble $\mathcal{A}$. Ce préordre est partiel.

Définition 3.1.3 *Un portefeuille est dit efficient s'il n'est dominé par aucun autre portefeuille eu sens du préordre $\succeq_{mv}$.*

On appelle frontière efficiente l'ensemble des couples

$$\{(\mathbb{E}[R^\pi], var(R^\pi)), \textit{avec } \pi \textit{ portefeuille efficient}\} \; ,$$

ou encore l'ensemble des couples

$$\left\{(\mathbb{E}[R^\pi], \sqrt{var(R^\pi)}), \textit{avec } \pi \textit{ portefeuille efficient}\right\} .$$

Sous l'hypothèse M, quel que soit l'agent k, donc quelle que soit sa fonction d'utilité $U^k(\mathbb{E}[.], var(.))$, si un portefeuille π^k est optimal alors il est efficient. Ceci est une conséquence de la croissance de U par rapport à la moyenne et sa décroissance par rapport à la variance. Résoudre le problème de Markowitz (3.1.8) revient alors à résoudre en deux étapes successives :

1. Détermination de la frontière efficiente. Ce qui revient à la résolution du problème $(P_{ff\sigma})$ ou d'une manière équivalente, du problème (P_{ffm}) :

$$(P_{ff\sigma}) : \begin{cases} \sup_{\pi\in\mathcal{A}} \mathbb{E}\left[R^\pi\right] \\ s.c. \;\; var(R^\pi) = \sigma^2 \end{cases} , \; (P_{ffm}) : \begin{cases} \inf_{\pi\in\mathcal{A}} var(R^\pi) \\ s.c. \;\; \mathbb{E}[R^\pi] = m \end{cases}$$

   où σ^2 et m sont des niveaux de variance et d'espérance de rentabilité arbitrairement fixés.

2. Sélection par l'agent du portefeuille optimal. Ceci revient à déterminer pour l'agent, en vue de ses préférences, l'élément de la frontière efficiente qu'il préfère.

3.1.4 Détermination de la frontière efficiente en absence de l'actif sans risque

On suppose dans ce paragraphe que les investisseurs sur le marché financier n'ont pas accès à l'actif sans risque S^0. Ainsi l'ensemble des portefeuilles admissibles est

$$\mathcal{A}_{no\,S^0} = \left\{ \pi \in \mathbb{R}^d, \sum_{i=1}^{d} \pi^i = \mathbf{1}'\pi = 1 \right\} .$$

Pour déterminer la frontière efficiente

$$\mathbb{F}(\mathcal{A}_{no\,S^0}) := \left\{ \left(\mathbb{E}[R^\pi], \sqrt{var(R^\pi)} \right),\ \pi \in \mathcal{A}_{no\,S^0} \text{ et } \pi \text{ portefeuille efficient} \right\} ,$$

on résout pour chaque σ^2 fixé le problème

$$(P_\sigma) : \begin{cases} \sup_{\pi \in \mathcal{A}_{no\,S^0}} \mathbb{E}[R^\pi] \\ s.c \\ var(R^\pi) = \sigma^2 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} \sup_{\pi \mathbb{R}^d} \pi' M \\ s.c \\ \pi'\Sigma\pi = \sigma^2 \\ \pi'\mathbf{1} = 1 \end{cases}$$

Une remarque utile

Puisque Σ est une matrice symétrique définie positive, l'application

$$< \xi, \zeta >_{\Sigma^{-1}} := \xi'\Sigma^{-1}\zeta$$

définit un produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$. On notera

$$\|\xi\|_{\Sigma^{-1}} := \sqrt{\xi'\Sigma^{-1}\xi}$$

la norme associée.

On introduit les réels

$$a := \mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1} = \|\mathbf{1}\|^2_{\Sigma^{-1}} \quad \text{et} \quad b := \mathbf{1}'\Sigma^{-1}M =< \mathbf{1}, M >_{\Sigma^{-1}} \ .$$

Variance minimale des portefeuilles efficients.

On commence par déterminer les valeurs de variance σ^2 pour lesquelles l'ensemble des portefeuilles admissibles de variance σ^2 est non vide

$$\mathcal{A}^{\sigma}_{no\,S^0} := \left\{\pi \in \mathbb{R}^d \; : \; \pi'\mathbf{1} = 1 \text{ et } \pi'\Sigma\pi = \sigma^2\right\} \neq \emptyset\,.$$

Si cet ensemble admet un élément π, alors

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbf{1}'\pi = \mathbf{1}'\Sigma^{-1}(\Sigma\pi) =< \mathbf{1}, \Sigma\pi >_{\Sigma^{-1}} \quad \text{et} \\ \sigma^2 &= \pi'\Sigma\pi \; = \; (\Sigma\pi)'\Sigma^{-1}(\Sigma\pi) = \|\Sigma\pi\|^2_{\Sigma^{-1}}\,, \end{aligned}$$

par suite

$$a\sigma^2 \;=\; \|\mathbf{1}\|^2_{\Sigma^{-1}}\|\Sigma\pi\|^2_{\Sigma^{-1}} \;\geq\; (< \mathbf{1}, \Sigma\pi >_{\Sigma^{-1}})^2 = 1$$

Réciproquement, si $a\sigma^2 \geq 1$, alors l'ensemble $\mathcal{A}^{\sigma}_{no\,S^0}$ est non vide. En effet, soit $e^{\perp}$ un vecteur non nul orthogonal à $\mathbf{1}$, $< e^{\perp}, \mathbf{1} >_{\Sigma^{-1}} = 0$, avec $\|e^{\perp}\|_{\Sigma^{-1}} = 1$. Un calcul simple permet de vérifier que le vecteur $\pi^0 := \Sigma^{-1}\left(\frac{1}{a}\mathbf{1} + \sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}}e^{\perp}\right)$ est un élément de $\mathcal{A}^{\sigma}_{no\,S^0}$.

Proposition 3.1.3 *L'ensemble $\mathcal{A}^{\sigma}_{no\,S^0}$ est non vide ssi $\sigma^2 \geq \frac{1}{a}$.*
Si $\sigma^2 = \frac{1}{a}$, cet ensemble se réduit au singleton $\mathcal{A}^{\sigma}_{no\,S^0} = \{\frac{1}{a}\Sigma^{-1}\mathbf{1}\}$. En particulier,la variance minimale des portefeuilles efficient est $\sigma^2_{\min} = \frac{1}{a}$, elle est réalisée par le portefeuille $\pi_{\min} = \frac{1}{a}\Sigma^{-1}\mathbf{1}$. La rentabilité espérée correspondante est $m_{\min} = \frac{b}{a}$.

Le cas simple $M \in Vect\{\mathbf{1}\}$.

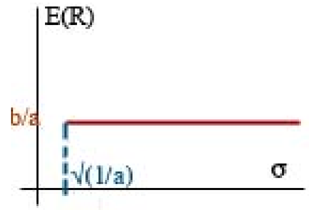
Dans ce cas, $M = \frac{b}{a}\mathbf{1}$. Le problème

$$(P_\sigma) : \sup_{\pi\mathbb{R}^d} m\pi'\mathbf{1} \quad \text{s.c.} \quad \pi'\Sigma\pi = \sigma^2 \text{ et } \pi'\mathbf{1} = 1,$$

devient trivial. On vérifie aisément la proposition suivante.

Proposition 3.1.4 *Lorsque $M \in Vect\{\mathbf{1}\}$, le rendement espéré maximal vaut $\frac{b}{a}$. La frontière efficiente est $\mathbb{F}(\mathcal{A}_{no\,S^0}) = \left\{(\frac{b}{a}, \sigma), \sigma^2 \geq \frac{1}{a}\right\}$.*

FIGURE 3.1 – Frontière efficiente dans le cas $M \in Vect\{\mathbf{1}\}$



Le cas $M \notin Vect\{\mathbf{1}\}$.

On suppose dans le reste de ce paragraphe que

$$M \notin Vect\{\mathbf{1}\} \quad \text{et que} \quad \sigma^2 > \frac{1}{a}\,.$$

○ On introduit le Lagrangien associé problème (P_σ) :

$$\mathcal{L} : (\pi, \lambda, \eta) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \pi' M + \lambda\left(\sigma^2 - \pi'\Sigma\pi\right) + \eta\left(1 - \pi'\mathbf{1}\right).$$

○ Pour déterminer les points stationnaires de ce problème d'optimisation et les multiplicateurs de Lagrange associés, on résout

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \nabla_\pi \mathcal{L}(\pi, \lambda, \eta) &= M - 2\lambda\Sigma\pi - \eta\mathbf{1} \; = \; 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(\pi, \lambda, \eta) &= \sigma^2 - \pi'\Sigma\pi = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta}(\pi, \lambda, \eta) &= 1 - \pi'\mathbf{1} = 0 \end{cases}$$

○ Sous la condition $\sigma^2 > \frac{1}{a}$, la résolution de ce système conduit à deux points stationnaires possibles π_λ^+ et π_λ^-, définis par

$$\pi_\lambda^\pm \; = \; \pm\frac{1}{2\lambda}\Sigma^{-1}\left(M - \eta^\pm\mathbf{1}\right) \quad \text{où} \quad \lambda := \frac{1}{2}\frac{\|M - \frac{b}{a}\mathbf{1}\|_{\Sigma^{-1}}}{\sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}}} \qquad (3.1.9)$$

Les multiplicateurs de Lagrange associés au point $\pi_\lambda^\pm$ sont $(\eta^\pm, \lambda^\pm)$ définis par

$$\eta^\pm \; = \; \frac{1}{a}\left(b \mp 2\lambda\right) = \frac{1}{a}\left(b \mp \frac{\|M - \frac{b}{a}\|_{\Sigma^{-1}}}{\sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}}}\right) \quad , \; \lambda^\pm \; = \; \pm\lambda \qquad (3.1.10)$$

∘ Les contraintes définies par les fonctions

$$h^1 : \pi \mapsto \pi'\Sigma\pi \qquad h^2 : \pi \mapsto \mathbf{1}'\pi \ ,$$

sont régulières en chacun des points π^+_λ et π^-_λ. En effet les vecteurs

$$\left(\nabla h^1(\pi^\pm_\lambda), \nabla h^2(\pi^\pm_\lambda)\right) \;=\; (2\Sigma\pi^\pm_\lambda, \mathbf{1}) \;=\; (\frac{1}{\lambda^\pm}(M - \eta^\pm\mathbf{1}), \mathbf{1})$$

forment un système libre puisque $M \notin Vect\{\mathbf{1}\}$.

∘ Seul le point $\pi^\star = \pi^+_\lambda$, avec les multiplicateurs de Lagrange (η^+, λ^+), vérifie la condition suffisante de maximum local. En effet, puisque $\lambda^+ = \lambda > 0$,

$$D^2_\pi \mathcal{L}(\pi^+_\lambda, \lambda^+_\lambda, \eta^+_\lambda) = -2\lambda\Sigma \ \text{ est une matrice semi-définie négative} \, .$$

∘ Le problème d'optimisation sous-contrainte P_σ est un problème de maximisation sur un ensemble compact

$$\mathcal{A}^\sigma_{noS^0} \;=\; \left\{\pi \in \mathbb{R}^d : \pi'\mathbf{1} = 1 \ \ et \ \ \|\pi\|^2_{\Sigma^{-1}} = \sigma^2\right\}$$

ceci assure le fait que π^+_λ est un maximum global.

Proposition 3.1.5 *Pour le niveau de variance $\sigma^2 > \frac{1}{a}$, la rentabilité maximale espérée est*

$$m(\sigma) \;:=\; \mathbb{E}\left[R^{\pi^+_\lambda}\right] \;=\; \frac{b}{a} + \sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}}\, \|M - \frac{b}{a}\mathbf{1}\|_{\Sigma^{-1}} \, .$$

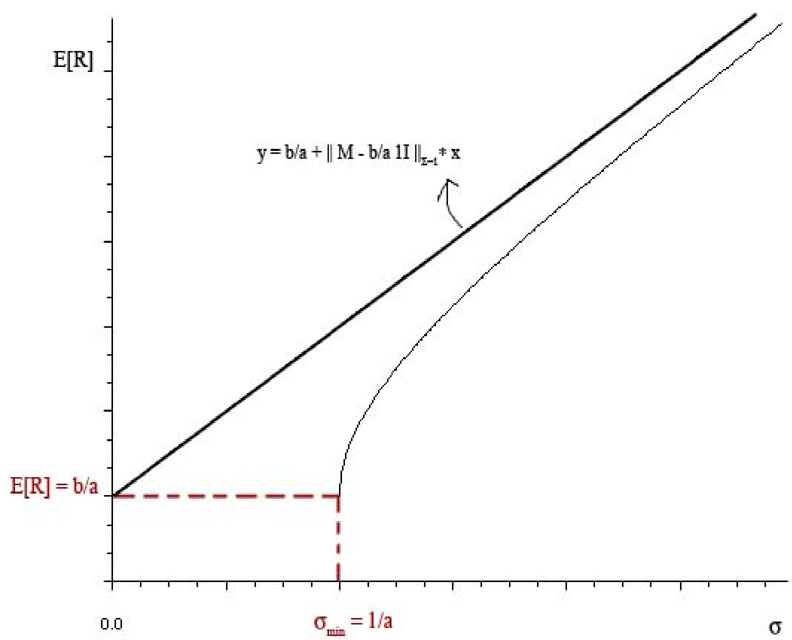
Elle est atteinte par le portefeuille

$$\pi(\sigma) \;:=\; \pi^+_\lambda \;=\; \frac{\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{a} + \sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}}\, \Sigma^{-1} \frac{M - \frac{b}{a}\mathbf{1}}{\|M - \frac{b}{a}\mathbf{1}\|_{\Sigma^{-1}}}$$

Remarque 3.1.3 La représentation graphique de l'ensemble des portefeuilles admissibles dans le plan moyenne-écart-type, i.e

$$\left\{(m = \mathbb{E}[R^\pi], \sigma = \sqrt{var(R^\pi)}\right), \pi'\mathbf{1} = 1\}$$

FIGURE 3.2 – Frontière efficiente dans le cas $M \notin Vect\{\mathbf{1}\}$



est donnée par

$$\left\{(m,\sigma), \sigma \geq \frac{1}{a},\ \underline{m}(\sigma) \leq m \leq m(\sigma)\right\}$$

– $m(\sigma)$ correspond à la rentabilité espérée maximale pouvant être atteinte par un portefeuille admissible de variance σ^2

– $\underline{m}(\sigma)$ est la rentabilité espérée minimale pouvant être atteinte par un portefeuille de variance σ^2. On peut montrer que

$$\underline{m}(\sigma) \quad = \quad \frac{b}{a} - \sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}}\, \|M - \frac{b}{a}\mathbf{1}\|_{\Sigma^{-1}}$$

et qu'elle est atteinte par le portefeuille

$$\underline{\pi}(\sigma) \quad = \quad \pi^- \quad = \quad \frac{\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{a} - \sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}}\,\Sigma^{-1}\frac{M - \frac{b}{a}\mathbf{1}}{\|M - \frac{b}{a}\mathbf{1}\|_{\Sigma^{-1}}}$$

La représentation de l'ensemble des portefeuilles admissibles dans le plan moyenne-écart-type est donc la parabole d'équation

$$(m - \frac{b}{a})^2 = (\sigma^2 - \frac{1}{a})\|M - \frac{b}{a}\mathbf{1}\|_{\Sigma^{-1}} .$$

La frontière de cet ensemble est constitué par la frontière efficiente et la frontière *inefficiente*.

Exercice 3.1.1 Montrez que pour tout portefeuille efficient π_λ^+, autre que le portefeuille de variance minimale, il existe un portefeuille π_γ^- sur la frontière de l'ensemble des portefeuilles admissibles tel que

$$cov(R^{\pi_\lambda^+}, R^{\pi_\gamma^-}) = 0$$

– Vérifiez que π_γ^- est dans la partie inefficiente de la frontière.
– Exprimez $\mathbb{E}[R^{\pi_\gamma^-}]$ et $var(R^{\pi_\gamma^-})$ en fonction de $\mathbb{E}[R^{\pi_\lambda^+}]$ et de $var(R^{\pi_\lambda^+})$.
– Montrez que la tangente en $(\sqrt{var(R^{\pi_\lambda^+})}, \mathbb{E}[R^{\pi_\lambda^+}])$ à la frontière efficiente coupe l'axe des ordonnées au point $(0, \mathbb{E}[R^{\pi_\gamma^-}])$.

La Figure (3.3) représente l'ensemble des portefeuilles admissibles $\mathcal{A}_{noS^0}$. Elle a été à partir des données suivantes de marché

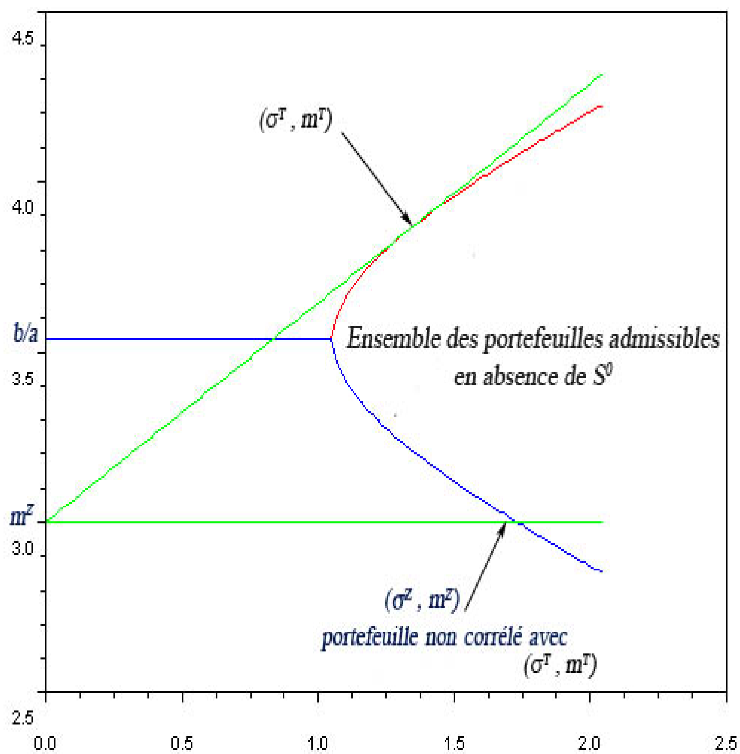
$$d = 2\ ,\ R^0 = 3.0\ ,\ M = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 2.5 & -0.5 \\ -0.5 & 3.0 \end{pmatrix} .$$

La branche de la parabole dessinée en rouge représente la frontière efficiente, celle dessinée en bleu représente la frontière 'inefficiente'.

3.1.5 Détermination de la frontière efficiente en présence de l'actif sans risque

On suppose dans ce paragraphe que les investisseurs peuvent investir dans les d actifs risqués S^i, $i = 1, \ldots, d$, aussi bien que dans l'actif sans risque

FIGURE 3.3 – Représentation de $\mathcal{A}_{noS^0}$



S^0. L'ensemble des portefeuilles admissibles est $\mathcal{A} = \mathbb{R}^d$. Pour déterminer la frontière efficiente

$$\mathbb{F}(\mathcal{A}) := \left\{ \left(\mathbb{E}[R^\pi], \sqrt{var(R^\pi)} \right), \pi \in \mathbb{R}^d \text{ et } \pi \text{ portefeuille efficient} \right\} ,$$

on résout pour chaque σ^2 fixé le problème

$$(\tilde{P}_\sigma) : \begin{cases} \sup_{\pi \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}[R^\pi] \\ s.c \\ var(R^\pi) = \sigma^2 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} \sup_{\pi \mathbb{R}^d} R^0 + \pi'(M - R^0 \mathbf{1}) \\ s.c \\ \pi' \Sigma \pi = \sigma^2 \end{cases}$$

Proposition 3.1.6 *La variance minimale des portefeuilles efficients est $\sigma^2_{min} = 0$. Elle est réalisée par le portefeuille $\pi = 0$, c'est à dire le portefeuille contenant uniquement l'actif sans risque S^0. La rentabilité espérée correspondante est R^0.*

On suppose maintenant que $\sigma^2 > 0$.

∘ On introduit le Lagrangien associé au problème

$$\mathcal{L}(\pi, \lambda) \quad = \quad R^0 + \pi'(M - R^0\mathbf{1}) + \lambda(\sigma^2 - \pi'\Sigma\pi).$$

∘ Pour déterminer les points stationnaires du problème $(\tilde{P}_\sigma)$ on résout le système

$$\begin{cases} \nabla_\pi \mathcal{L}(\pi, \lambda) & = & M - R^0\mathbf{1} - 2\lambda\Sigma\pi = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(\pi, \lambda) & = & \sigma^2 - \pi'\Sigma\pi = 0 \end{cases}$$

∘ Le seul point stationnaire possible est

$$\tilde{\pi}^\star := \frac{1}{\tilde{\lambda}^\star}\Sigma^{-1}(M - R^0\mathbf{1}) \quad \text{avec} \quad \tilde{\lambda}^\star = \frac{1}{2}\frac{\|M - R^0\mathbf{1}\|_{\Sigma^{-1}}}{\sigma} \ .$$

$\tilde{\lambda}^\star$ étant le multiplicateur de Lagrange associé à $\tilde{\pi}^\star$.

La contrainte définie par la fonction

$$h : \pi \mapsto \pi'\Sigma\pi \ ,$$

est régulière au point $\pi^\star$. En effet le vecteur $\nabla h(\pi^\star) = 2\sigma\pi^\star \neq 0$ car $\pi^\star \neq 0$.

∘ Le point $\tilde{\pi}^\star$ vérifie la condition suffisante de maximum local : la matrice $D^2_\pi \mathcal{L}(\tilde{\pi}^\star, \tilde{\lambda}^\star) = -2\lambda^\star\Sigma^{-1}$ est une matrice définie négative.

∘ La concavité du problème assure que $\pi^\star$ est un point le maximum global.

Proposition 3.1.7 *Pour le niveau de variance $\sigma^2 > 0$, la rentabilité maximale espérée est*

$$\tilde{m}(\sigma) \quad = \quad R^0 + \|M - R^0\mathbf{1}\|_{\Sigma^{-1}}\sigma \ . \qquad (3.1.11)$$

Elle est réalisée par le portefeuille

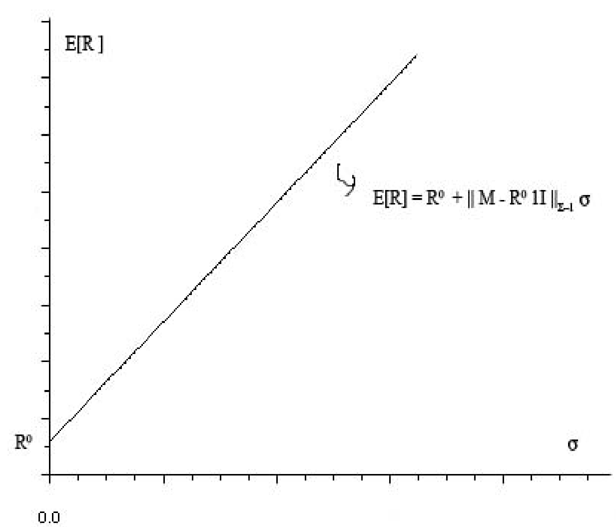
$$\tilde{\pi}(\sigma) \quad = \quad \sigma\Sigma^{-1}\frac{(M - R^0\mathbf{1})}{\|M - R^0\mathbf{1}\|_{\Sigma^{-1}}} \ . \tag{3.1.12}$$

Le coefficient $Sh := \|M-R^0\mathbf{1}\|^2_{\Sigma^{-1}} = (M-R^0\mathbf{1})'\Sigma^{-1}(M-R^0\mathbf{1})$ est appelé *performance de Sharpe du marché*. Les équations (3.1.11) et (3.1.12) peuvent être écrites en utilisant la performance de Sharpe

$$\tilde{m}(\sigma) \quad = \quad R^0 + \sqrt{Sh}\sigma \ , \tag{3.1.13}$$

$$\tilde{\pi}(\sigma) \quad = \quad \frac{\sigma}{\sqrt{Sh}}\Sigma^{-1}\left(M - R^0\mathbf{1}\right) \ . \tag{3.1.14}$$

FIGURE 3.4 – Frontière efficiente en présence de l'actif sans risque



Théorème des deux fonds.

Supposons que $b - aR^0 \neq 0$. Soit $\sigma^2 > 0$ un niveau de variance fixé, le portefeuille efficient correspondant $\tilde{\pi}(\sigma)$ n'est pas nécessairement totalement investi dans les actifs risqués

$$\mathbf{1}'\tilde{\pi}(\sigma) \quad \text{n'est pas en général} \quad = \ 1 \ .$$

Par contre, il vérifie nécessairement

$$\mathbf{1}'\tilde{\pi}(\sigma) \neq 0 \ .$$

En effet, d'après l'expression des portefeuilles efficients en présence de l'actif sans risque, supposer que $\mathbf{1}'\tilde{\pi}(\sigma) = 0$ veut dire que l'on a

$$\sigma \mathbf{1}'\Sigma^{-1}(M - R^0\mathbf{1}) \ = \ \sigma(b - aR^0) \ = \ 0$$

ce qui implique une variance égale à $0 < \sigma^2$.
Ainsi, on peut toujours définir

$$\tilde{\xi} \ := \ \frac{1}{\mathbf{1}'\tilde{\pi}(\sigma)}\,\tilde{\pi}(\sigma) \ ,$$

ce vecteur vérifie par définition $\mathbf{1}'\tilde{\xi} = 1$. Il correspond donc à un portefeuille totalement investi dans les actifs risqués, il permet d'écrire

$$\tilde{\pi}(\sigma) \ = \ (1 - \tilde{\pi}^0(\sigma))\tilde{\xi} \quad \text{où} \quad \tilde{\pi}^0(\sigma) := 1 - \mathbf{1}'\tilde{\pi}(\sigma) \ .$$

Le portefeuille $\tilde{\xi}$ dépend uniquement des caractéristiques du marché : la rentabilité excédentaire espérée des actifs risqués $M - R^0$ et la matrice de variance-covariance Σ

$$\tilde{\xi} \ = \ \frac{\Sigma^{-1}(M - R^0\mathbf{1})}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}(M - R^0\mathbf{1})} = \frac{1}{b - aR^0}\Sigma^{-1}(M - R^0\mathbf{1}) \ ,$$

il ne dépend pas des caractéristiques individuelles des investisseurs.

Théorème 3.1.1 (Théorème des deux fonds) *Supposons que $b - aR^0 \neq 0$. En présence de l'actif sans risque, tous les agents répartissent leur richesse initiale entre l'actif sans risque S^0 et le même portefeuille risqué $\tilde{\xi}$. Leurs paramètres personnels (fonction d'utilité, aversion pour le risque,...) n'interviennent que pour déterminer la répartition optimale entre S^0 et ξ.*

Autrement dit, les investisseurs répartissent leur richesse entre l'actif sans risque et un fond reproduisant l'indice de marché déterminé par ξ. On parle de *gestion indicielle* ou encore de *gestion passive*.

Droite de Marché et portefeuille tangent.

On suppose dans ce paragraphe que $M \notin vect\{\mathbf{1}\}$.

Lorsque les investisseurs ont accès au placement sans risque (actif sans risque S^0), il est clair qu'ils ont plus d'opportunités d'investissement, $\mathcal{A}_{no\, S^0} \subset \mathcal{A}$, par conséquent, pour un niveau de variance σ^2 fixé, la rentabilité espérée maximale qui peut être atteint par des portefeuilles formés uniquement à partir des actifs risqués, $\tilde{\pi} \in \mathcal{A}_{no\, S^0}$, est inférieure à la rentabilité espérée maximale qui peut être atteinte avec des portefeuilles $\pi \in \mathcal{A}$. Par suite, dans le plan (écart-type, rentabilité espérée), la représentation graphique de la frontière efficiente $\mathbb{F}(\mathcal{A}_{no\, S^0})$ est toujours en dessous de la représentation graphique de la frontière efficiente $\mathbb{F}(\mathcal{A})$.

On note $\mathcal{C}_{no\, S^0}$ la représentation de la frontière efficiente $\mathbb{F}(\mathcal{A}_{no\, S^0})$ dans le plan (écart-type,rentabilité espérée)

$$\mathcal{C}_{no\, S^0} \quad : \quad m(\sigma) \; = \; \frac{b}{a} + \sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}}\, \|M - \frac{b}{a}\mathbf{1}\|_{\Sigma^{-1}} \; ,$$

et $\mathcal{C}$ la représentation de la frontière efficiente $\mathbb{F}(\mathcal{A}_{no\, S^0})$

$$\mathcal{C} \quad : \quad \tilde{m}(\sigma) \; = \; R^0 + \|M - R^0\mathbf{1}\|_{\Sigma^{-1}}\, \sigma \; .$$

La droite $\mathcal{C}$ est appelée *droite de marché* ou *Capital Market Line (CML)*. Lorsque les deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}(\mathcal{A}_{no\, S^0})$ se touchent cela veut dire que l'on est en mesure de former dans le marché initial (où l'utilisation de l'actif sans risque S^0 est permise) un portefeuille efficient sans recourir au placement sans risque. Existence de π^t i.e. efficience de l'indice ξ.

Déterminer l'intersection des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}(\mathcal{A}_{no\, S^0})$ revient à résoudre l'équation

$$\begin{cases} \frac{b}{a} + \sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}}\, \|M - \frac{b}{a}\mathbf{1}\|_{\Sigma^{-1}} = R^0 + \|M - R^0\mathbf{1}\|_{\Sigma^{-1}}\, \sigma \,, \\ \sigma \geq \sigma_{min} \,. \end{cases} \tag{3.1.15}$$

Ce qui conduit à résoudre de manière équivalente

$$\begin{cases} \sigma\|(R^0 - \frac{b}{a})\mathbf{1}\|_{\Sigma^{-1}} + \text{signe}(R^0 - \frac{b}{a})\frac{\|M - R^0\mathbf{1}\|_{\Sigma^{-1}}}{\sqrt{a}} = 0 \,, \\ \sigma \geq \frac{1}{\sqrt{a}} \,. \end{cases}$$

On en déduit le résultat suivant.

Proposition 3.1.8 *L'intersection des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_{no\,S^0}$ est non vide si et seulement si $R^0 < \frac{b}{a}$. Dans ce cas $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}_{no\,S^0}$ est égale à un singleton (σ^t, m^t) donné par*

$$\sigma^t = \frac{\sqrt{Sh}}{(b - aR^0)} = \sigma_{min}\left(1 + \frac{\|M - \frac{b}{a}\mathbf{1}\|_{\Sigma^{-1}}}{\|(\frac{b}{a} - R^0)\mathbf{1}\|_{\Sigma^{-1}}}\right) > \sigma_{min}, \tag{3.1.16}$$

$$m^t = R^0 + \frac{Sh}{b - aR^0}. \tag{3.1.17}$$

Le couple (σ^t, m^t) correspondent à l'écart type et à la rentabilité moyenne d'un portefeuille efficient π^t appelé portefeuille tangent, qui n'est rien d'autre que l'indice ξ.

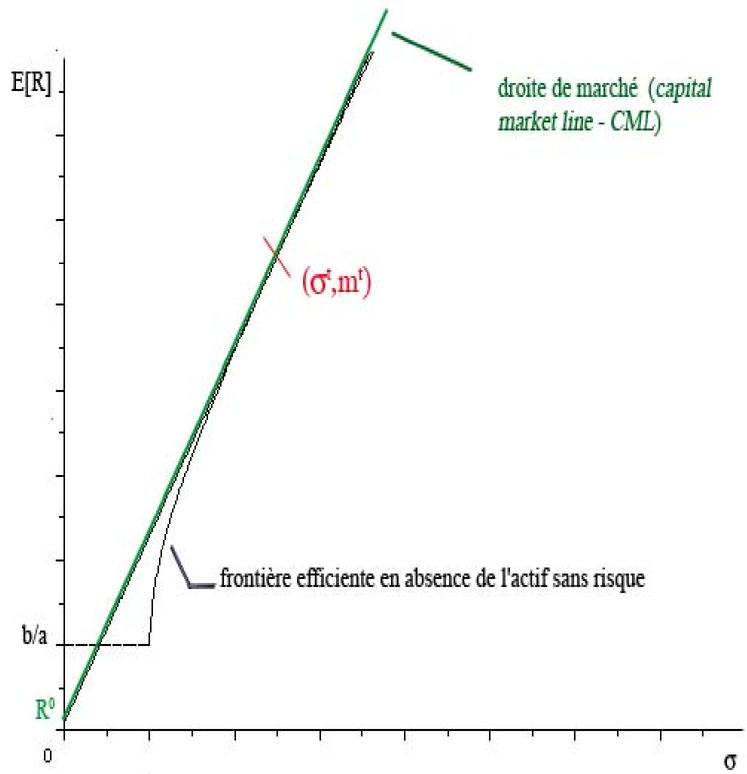
Le portefeuille tangent π^t vérifie donc

$$(\sigma^t, m^t) = \mathcal{C} \cap \mathcal{C}_{no\,S^0},\ m^t = E[R^{\pi^t}],\ \sigma^t = \sqrt{var(R^{\pi^t})},\ \pi^t = \xi \in \mathcal{A}_{no\,S^0}.$$

3.2 Le modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF)

(Modèle de Sharpe - Lintner) Le *modèle d'équilibre des actifs financiers* (MEDAF) est un modèle dont le but est de déterminer les rentabilités appropriées des différents actifs qui forment le marché financier. C'est un modèle d'équilibre, c'est a dire que les rentabilités sont expliquées par l'adéquation

FIGURE 3.5 – Portefeuille tangent



entre l'offre et la demande en titres des différents agents qui interviennent sur le marché. Ce modèle, qui se base sur la théorie de choix de portefeuille de Markowitz, a été développé gr,ce aux travaux de Jack Treynor (1961), William Sharpe (1964), John Lintner (1965) et Jan Mossin (1966). Le message essentiel du MEDAF est que le risque de chaque titre peut être décomposé en une composante *systématique* commune à tous les actifs du marché et une composante *spécifique* diversifiable, le marché ne rémunérant que la composante systématique.

3.2.1 Dérivation du modèle

On reprend le modèle de marché du paragraphe 3.1.1.

Hypothèses sur l'offre.

○ On suppose connues les quantités disponibles de chacun des titres. On note

$$\begin{array}{rl} q_M^i & \text{la quantité disponible de l'actif } S^i, \\ q_M := \begin{pmatrix} q_M^1 \\ \vdots \\ q_M^d \end{pmatrix} & \text{le vecteur quantités d'actifs disponibles.} \end{array}$$

○ Chacun de ces titres est parfaitement divisible et le marché ne comporte pas de frictions.

Hypothèse sur le comportement des investisseurs.

○ Un nombre égal à J agents intervient sur le marché. Chaque agent j possède une dotation initiale en actifs dont la valeur est $w_j > 0$. Chaque agent investit [1] sa richesse initiale w^j au présent sur le marché en constituant un portefeuille π_j qu'il maintiendra constant tout au long de l'horizon d'investissement T.
On note

$$W \ := \ \sum_{i=1}^{N} q_M^i S^i(0) \ .$$

la valeur numéraire de tous les actifs disponibles sur le marché.

○ On suppose que tous ces agents forment des anticipations homogènes, c'est à dire que les probabilités accordées aux évènements futurs ne varient pas d'un agent à l'autre, mais coïncident.

○ On suppose également que les agents forment des anticipations rationnelles, c'est à dire que les probabilités qu'ils accordent aux différents évènements sont

1. En d'autres termes, chaque agent décide au présent de modifier son portefeuille initial en vendant/achetant des actis risqués, de manière à obtenir un *portefeuille optimal.*

les bonnes i.e. en moyenne les agents ne se trompent pas sur la réalisation des évènements.

∘ L'objectif de chaque investisseur est de sélectionner le portefeuille qui lui assure la 'meilleure' rentabilité au bout de l'horizon T et adopte à cet effet le critère moyenne-variance de Markowitz. En se rappelant les résultats de la section précédente Proposition 3.1.7, on déduit que l'agent j choisit le portefeuille efficient $\pi_j = \tilde{\pi}(\sigma_j)$ où σ_j est la solution de

$$\sup_{\sigma \in \mathbb{R}_+} U_j(\tilde{m}(\sigma), \sigma^2) \, .$$

Ici, U_j désigne la fonction d'utilité de l'agent j et $\tilde{m}(\sigma)$, dont l'expression est définie dans (3.1.11), désigne la rentabilité espérée du portefeuille efficient de variance σ. Ainsi, l'agent j choisit le portefeuille

$$\pi_j \; = \; \tilde{\pi}(\sigma_j) \; = \; \sigma_j \Sigma^{-1} \frac{(M - R^0 \mathbf{1})}{\|M - R^0 \mathbf{1}\|_{\Sigma^{-1}}} \; , \tag{3.2.1}$$

dont la variance σ^j est déterminée par son degré d'aversion au risque.

Equilibre du marché : efficience du portefeuille de marché. A l'équilibre du marché, les prix à la date T des actifs (ou de manière équivalente les rentabilités) vérifient

Demande en actifs par tous les agents

=

Offre totale d'actifs sur le marché

On note $\pi_{\mathbf{M}}$ le portefeuille de marché, c'est à dire, le portefeuille composé par tous les actifs risqués dans les proportions du marché

$$\pi^i_{\mathbf{M}} \; = \; q^i_M \frac{S^i(0)}{W}$$

pour $i = 1, \ldots, d$, avec $W = \sum_{i=1}^{d} q_M^i S^i(0)$. La relation d'équilibre entre offre et demande s'écrit alors

$$\sum_{j=1}^{J} w_j \frac{\pi_j^i}{S^i(0)} = q_M^i = \pi_{\mathbf{M}}^i \frac{W}{S^i(0)} \ ,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbf{M}} &= \left(\sum_{j=1}^{J} \frac{w_j}{W} \sigma_j \right) \Sigma^{-1} \frac{(M - R^0 \mathbf{1})}{\|M - R^0 \mathbf{1}\|_{\Sigma^{-1}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{Sh}} \left(\sum_{j=1}^{J} \frac{w_j}{W} \sigma_j \right) \Sigma^{-1} (M - R^0 \mathbf{1}) \ . \end{aligned}$$

On voit que le portefeuille du marché est un portefeuille efficient. C'est un portefeuille efficient formé uniquement d'actifs risqués, donc il est égal au portefeuille tangent d'après la proposition 3.1.8

$$\pi_{\mathbf{M}} = \xi = \frac{1}{b - aR^0} \Sigma^{-1} (M - R^0 \mathbf{1}) \ . \tag{3.2.2}$$

Proposition 3.2.1 *L'équilibre entre l'offre et la demande, sur ce marché financier, implique que le portefeuille de marché est efficient. Par conséquent $\pi_{\mathbf{M}}$ est le portefeuille tangent : point de rencontre entre la droite de marché (CML), dont la représentation graphique est notée $\mathcal{C}$, et la frontière efficiente en absence d'actif sans risque, dont la représentation graphique est notée $\mathcal{C}_{noS^0}$.*

En vue du Théorème 3.1.1, on peut dire qu'à l'équilibre, les investisseurs répartissent leurs richesses entre l'actif sans risque S^0 et le portefeuille de marché $\pi_{\mathbf{M}}$.

Si on regarde la covariance de la rentabilité $R^{\pi_{\mathbf{M}}}$ du portefeuille de marché avec le vecteur R des rentabilités des actifs risqués, en utilisant le fait que $\pi_{\mathbf{M}}$ est le portefeuille tangent π^t, ainsi que les équations (3.2.2), (3.1.16) et

(3.1.17), on obtient

$$\begin{aligned} cov(R, R^{\pi_{\mathbf{M}}}) = cov(R, \pi'_{\mathbf{M}} R) &= \Sigma \pi_{\mathbf{M}} \\ &= \frac{1}{b - aR^0} \left(M - R^0 \mathbf{1} \right) . \\ &= \frac{var(R^{\pi_{\mathbf{M}}})}{\mathbb{E}[R^{\pi_{\mathbf{M}}}] - R^0} (M - R^0 \mathbf{1}) . \end{aligned}$$

Proposition 3.2.2 *A l'équilibre, les rentabilités $R^i, i = 1, \ldots, d$, des actifs risqués sont telles que*

$$\mathbb{E}[R^i] - R^0 = \beta^i (\mathbb{E}[R^{\pi_{\mathbf{M}}}] - R^0) \quad où \quad \beta^i := \frac{cov(R^i, R^{\pi_{\mathbf{M}}})}{var(R^{\pi_{\mathbf{M}}})} . \tag{3.2.3}$$

Le coefficient β^i est appelé le beta de l'actif risqué i.

Remarque 3.2.1 Les relations écrites ci-dessus peuvent prendre également cette forme :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[R^i] - R^0 &= (b - aR^0) cov(R^i, R^{\pi_{\mathbf{M}}}) \\ &= \sqrt{\frac{Sh}{var(R^{\pi_{\mathbf{M}}})}} cov(R^i, R^{\pi_{\mathbf{M}}}) . \end{aligned}$$

Risque spécifique et risque systématique. Le MEDAF implique que pour tout actif risqué S^i, $i = 1, \ldots, d$, la rentabilité R^i peut s'écrire

$$R^i - R^0 = \beta^i \left(R^{\pi_{\mathbf{M}}} - R^0 \right) + \varepsilon^i , \tag{3.2.4}$$

où $\mathbb{E}[\varepsilon^i] = 0$ et $cov(R^{\pi_{\mathbf{M}}}, \varepsilon^i) = 0$. La variance de la rentabilité de l'actif risqué s'écrit alors

$$(\sigma^i)^2 = var(R^i) = (\beta^i)^2 var(R^{\pi_{\mathbf{M}}}) + var(\varepsilon^i) . \tag{3.2.5}$$

Ainsi le risque de l'actif S^i se décompose en deux parties

- risque systématique : $(\beta^i)^2 var(R^{\pi_{\mathbf{M}}})$,
- risque idiosyncratique : $var(\varepsilon^i)$.

Lorsque le coefficient $\beta^i > 1$ on dit que l'actif S^i correspond à un placement *agressif*, et lorsque $\beta^i < 1$ on parle de placement *concervateur*.

3.2.2 Extensions du modèle

Le MEDAF sans actif sans risque. La possibilité de ‘prêts’ ou ‘emprunts’, sans restrictions, à un taux sans risque est une hypothèse peu réaliste. Black (1972) propose un modèle d’équilibre avec des contraintes sur les transactions qui portent sur l’actif sans risque R^0. On examine dans cette section la relation d’équilibre entre offre et demande si on suppose que les investisseurs n’ont pas accès à S^0.

D’après les résultats des sections précédentes, le portefeuille de marché vérifie à l’équilibre entre offre et demande la relation

$$\sum_{j=1}^{J} w_j \left\{ \frac{\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{a} + \sqrt{\sigma_j^2 - \frac{1}{a}}\Sigma^{-1} \frac{M - \frac{b}{a}\mathbf{1}}{\|M - \frac{b}{a}\mathbf{1}\|_{\Sigma^{-1}}} \right\} \quad = \quad W\pi_{\mathbf{M}} \ . \tag{3.2.6}$$

D’autre part, les investisseur n’ayant accès qu’aux actifs risqués, nous avons

$$\sum_{j=1}^{J} w_j \quad = \quad W \ . \tag{3.2.7}$$

Combinant (3.2.6) et (3.2.7), la relation d’équilibre s’écrit sous la forme

$$\frac{\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{a} + \sqrt{\tilde{\sigma}^2 - \frac{1}{a}}\,\Sigma^{-1} \frac{M - \frac{b}{a}\mathbf{1}}{\|M - \frac{b}{a}\mathbf{1}\|_{\Sigma^{-1}}} \quad = \quad \pi_{\mathbf{M}} \ , \tag{3.2.8}$$

où $\tilde{\sigma}$ est définie par

$$\tilde{\sigma}^2 \quad = \quad \frac{1}{a} + \left\{ \sum_{j=1}^{J} \frac{w_j}{W} \sqrt{\sigma_j^2 - \frac{1}{a}} \right\}^2 \ .$$

– De cette relation on déduit que le portefeuille de marché est un portefeuille efficient.

– Mais contrairement au modèle de la section précédente, les portefeuilles d’actifs risqués détenus par les investisseurs ne lui sont pas proportionnels.

Le portefeuille de bêta nul. La Remarque 3.1.3 donne une description de la représentation de l'ensemble des portefeuilles admissibles (en absence de l'actif sans risque) dans le plan moyenne-écart-type et de sa frontière.

On note qu'à tout portefeuille $\pi(\sigma)$ de la frontière efficiente, on peut associer un portefeuille $\underline{\pi}$ de la frontière inefficiente tel que

$$cov(R^{\pi(\sigma)}, R^{\underline{\pi}}) = 0 \ .$$

Un calcul simple permet de vérifier que pour $\pi_{\mathbf{M}} = \pi(\tilde{\sigma})$, le portefeuille

$$\begin{aligned} \underline{\pi} \quad &:= \quad \frac{1}{a}\Sigma^{-1}\mathbf{1} - \sqrt{\underline{\sigma}^2 - \frac{1}{a}}\,\Sigma^{-1}\frac{M - \frac{b}{a}\mathbf{1}}{\|M - \frac{b}{a}\mathbf{1}\|_{\Sigma^{-1}}} \\ \text{où}\sqrt{\underline{\sigma}^2 - \frac{1}{a}} \quad &= \quad \frac{1}{a\sqrt{\tilde{\sigma}^2 - \frac{1}{a}}} \end{aligned}$$

est le portefeuille de la frontière inefficiente tel que

$$cov(R^{\pi_{\mathbf{M}}}, R^{\underline{\pi}}) \quad = \quad 0 \ .$$

La rentabilité espérée du portefeuille $\underline{\pi}$ est égale à

$$\underline{m} \quad = \quad \mathbb{E}[R^{\underline{\pi}}] \ = \ \frac{b}{a} - \frac{1}{a\sqrt{\tilde{\sigma}^2 - 1/a}}\|M - \frac{b}{a}\mathbf{1}\|_{\Sigma^{-1}}$$

On peut vérifier que la tangente à la frontière efficiente au point $\pi_{\mathbf{M}}$ coupe l'axe des ordonnées au point $(0, \underline{m})$ (cf Figure 3.3).

Le résultat important de cette section est que dans ce modèle nous obtenons une relation analogue à la relation du MEDAF classique :

Proposition 3.2.3 *Pour tout actif risqué S^i on a*

$$(\mathbb{E}[R^i] - \underline{m}) = \beta^i(\mathbb{E}[R^{\pi_{\mathbf{M}}}] - \underline{m}) \quad avec \quad \beta^i = \frac{cov(R^i, R^{\pi_{\mathbf{M}}})}{var(R^{\pi_{\mathbf{M}}})} \ .$$

Le portefeuille $\underline{\pi}$ est appelé portefeuille de bêta nul.

Preuve : exercice !

Contraintes sur les ventes à découvert des actifs risqués. Si le modèle de Black abandonne l'hypothèse peu réaliste sur l'existence d'un actif sans risque, il n'impose aucune contrainte sur les ventes à découvert des actifs risqués. Or, dans la réalité, les ventes à découverts des actifs risqués sont soumises à des contraintes (interdictions, limitations, ...). Dans un modèle ou les ventes à découverts des actifs risqués sont contraintes, bien que chaque agent continue à choisir un portefeuille efficient, à l'équilibre le portefeuille de marché m'est plus efficient. La relation qui lie les rentabilités des actifs risqués à leurs betas n'est plus valable.

Présence de frictions. Si le marché comporte des *frictions* telles que les coûts de transaction ou les taxes, la ré-allocation d'un portefeuille entraîne des coûts. Alors, il pourrait être préférable pour un investisseur de garder un portefeuille sous-optimal, que de le changer en un portefeuille moyenne-variance efficient à cause des coûts que cette opération engendrerait.

3.2.3 Validation empirique

A son élaboration, le MEDAF a connu un vif succès parmi les académiciens tout aussi bien que parmi les praticiens. Il continue à être utilisé en pratique, par exemple pour évaluer la performance des portefeuilles gérés, ou pour évaluer le niveau de risque d'un projet d'investissement. Ceci est justifié par

- la simplicité de ce modèle !
- le fait que ce modèle explique par une relation simple le lien entre rentabilité/risque de tout actif financier. Il indique en outre une méthode relativement facile pour mesurer le risque attaché à tout placement financier.

Le MEDAF repose cependant sur des hypothèses très réductrices par rapport à la réalité. Beaucoup de travaux se sont penchés sur la question de savoir si l'observation des données du marché permet de conforter les conclusions du MEADF, ou si, au contraire, elles tendent à les infirmer. Nous faisons, dans ce paragraphe, une revue historique rapide des travaux empiriques de tests du MEDAF.

Comment tester le MEDAF ?

Les tests du MEDAF reposent sur les implications suivantes de ce modèle :

– Une relation linéaire relie les rentabilités espérées de tous les actifs à leurs betas

$$\mathbb{E}[R^i - R^z] \;=\; \beta^i \mathbb{E}[R^M - R^z] \quad \text{où} \quad \beta^i = cov(R^M, R^i)/var(R^M) \;,$$

ici R^M désigne la rentabilité du marché et R^z est un portefeuille non-corrélé avec le portefeuille de marché

– La rentabilité espérée du marché dépasse la rentabilité d'un portefeuille non corrélé avec le marché

$$\mathbb{E}[R^M] \;\;\geq\;\; \mathbb{E}[R^z] \;.$$

– Dans la version de Sharpe-Lintner, la rentabilité espérée d'un portefeuille qui n'est pas corrélé avec le portefeuille de marché est égale à la rentabilité de l'actif sans risque

$$\mathbb{E}[R^z] \;\;=\;\; R^0 \;.$$

Résultats de travaux empiriques.

• Les premiers travaux empiriques se sont concentrés sur le modèle de Sharpe-Lintner. L'idée repose sur une régression linéaire simple entre les moyennes des rentabilités des actifs et leurs betas estimés

$$\bar{R}^i - R^0 = a + b\beta^i + \varepsilon^i \;.$$

D'après le MEDAF, dans cette régression linéaire $a = 0$ et $b = \mathbb{E}[R^M] - R^0$.
Ce test rencontre deux problèmes : (i) problème d'estimations des betas des actifs, des erreurs de mesures peuvent ainsi s'accumuler, (ii) les résidus $\varepsilon^i, \varepsilon^j$ peuvent être corrélés. Ces corrélations peuvent biaiser les valeurs de a et b obtenues par la méthodes des moindre carrés.

Des travaux tels que Blume (70), Black, Jensen et Scholes (1972), Fama et MacBeth (1973), ou encore Fama et French (1992) ont proposé des méthodologies permettant de surmonter (quelque peu ...) ces difficultés.

Le résultat de ces travaux est de rejeter la version de Sharpe-Lintner du MEDAF.

• Des travaux plus récents testent si les différences entre les rentabilités espérées des actifs sont entièrement expliquées par le bêta, ou si au contraire elles dépendent aussi d'autres éléments. Pour ce faire, on ajoute une deuxième variable explicative X dans la régression linéaire :

$$\bar{R}^i - R^0 = a + b\beta^i + \delta X^i + \varepsilon^i \ .$$

Si le MEDAF est vrai, le coefficient δ ne devrait pas être significativement différent de zéro.
Parmi ces tests on peut citer ceux de Fama et MacBeth (1973), Gibbons (1982) et Stambaugh (1982). Ces travaux ont confirmé la version de Black du MEDAF.

• Au cours des années 80 des travaux empiriques sont venus infirmer le modèle de Black. L'un des plus notoires est celui de Fama et French (1992) [2]. La conclusion de leur travail est que le bêta ne suffit pas à expliquer les rentabilités des actifs, d'autres éléments interviennent : les effets de taille (capitalisation

2. Leur article est parfois surnommé *'The Beta is dead' article*

des titres [3]), le ratio *book to market* [4], le ratio dette/actif, ...

Deux réactions.

Deux réactions face aux résultats de ces test.

1. La première critique la procédure de test du MEADF. L'une des critiques les plus importantes est la critique de Roll (1977) qui souligne la difficulté de définir convenablement le portefeuille de marché : quels sont les éléments qui le forment (titres domestiques, étrangers, capital humain... etc) ? Quelle est la disponibilité des données ?

Une autre difficulté vient du fait que le MEDAF dans la version de Sharpe-Lintner , ou de celle de Black, est un modèle statique, alors que les données utilisés ne sont pas forcément stables.

Cette réaction amène à considérer des versions plus élaborées du MEDAF en rejetant l'hypothèse de stabilité des bêtas et en cherchant de meilleures approximations du portefeuille de marché. On peut citer dans ce sens les travaux de Jagannathan et Wang (1996, 1998).

2. La deuxième réaction est de signer la mort du bêta comme seul facteur explicatif des rentabilités. Cette réaction aboutit à deux axes de recherche.

(i) Le premier cherche à déterminer des modèles plus complexes que le MEDAF pour expliquer les rentabilités en intégrant des éléments autres que les bêtas. C'est le cas du modèle à trois facteurs de Fama et French (1996) qui explique les rentabilités par le bêta, la capitalisation et le ratio *book-to-market*. Ce modèle rejoint les travaux plus anciens de Ross (1976) sur les modèles factoriels.

3. capitalisation : système de placement financier dont les revenus (intérêts, dividendes, plus values) ne sont pas versés périodiquement au bénéficiaire, mais transformés en capital pour produire à leur tour des revenus.

4. ratio *book to market* : Ratio entre la valeur comptable d'une action et sa valeur de marché. Si le ratio est supérieur à 1, cela signifie que la valeur comptable est supérieure à la valeur de marché. Cela peut être le signe d'une sous évaluation.

(ii) Le deuxième axe de recherche est du domaine de la finance comportementale. Les anomalies par rapport aux MEDAF, observées empiriquement, sont expliquées par des biais comportementaux ou l'irrationalité des investisseurs. On peut citer à ce titre les travaux de Lakonishok - Schleifer - Vishny (1994), Chan - Lakonishok (2002) ou Chan - Karceski - Lakonishok (2002).

Nous allons terminer ce chapitre par la présentation d'un modèle alternatif au MEDAF pour expliquer les rentabilités des titres financiers : l'évaluation par arbitrage dans le cadre des modèles factoriels.

3.3 Théorie de l'évaluation par arbitrage (APT) et modèles factoriels

La théorie de l'évaluation par arbitrage (*Arbitrage Pricing Theory APT*) a été initiée par les travaux de Ross (1976). Ross développe un modèle de marché financier sur une période de temps où tous les investisseurs s'accordent à penser que les rentabilités des actifs financiers sont expliquées par un modèle factoriel. Il suppose qu'à l'équilibre, aucune opportunité d'arbitrage n'est possible. Il résulte de cette hypothèse une relation linéaire entre les rentabilités espérées des différents actifs et leurs covariances avec les *facteurs*.

3.3.1 Modèle factoriel linéaire

On considère un marché formé par n actifs financiers sur une période de temps $[0, T]$. On note R^i la rentabilité de l'actif i sur la période $[0, T]$, $i = 1, \ldots, n$.

Le modèle factoriel stipule que les rentabilités de tous les titres sont expliquées par les mêmes K *facteurs* représentés par des variables aléatoires $F_1, \ldots F_K$.

Plus précisément, le modèle factoriel linéaire suppose

$$R^i := a_i + b_{i,1}F_1 + \cdots + b_{i,k}F_k + \varepsilon_i \ , \qquad i = 1, \ldots n \ , \tag{3.3.1}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varepsilon_i] &= 0 && (3.3.2) \\ \mathbb{E}[F_k] &= 0 && (3.3.3) \\ cov(\varepsilon_i, F_k) &= 0 && (3.3.4) \\ cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) &= 0 && (3.3.5) \end{aligned}$$

pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $k, l \in \{1, \ldots K\}$ tels que $k \neq l$.

Remarque 3.3.1 Dans certains développements de la théorie de l'APT, les conditions (3.3.4), (3.3.5) peuvent être relâchées (à titre d'exemple Ingersoll (1984)).

La variable aléatoire ε_i est appelée *risque idiosyncratique*, le coefficient $b_{i,k}$ est appelé le poids ou le bêta de l'actif i sur le facteur k. Les conditions (3.3.2), (3.3.3) impliquent

$$\mathbb{E}[R^i] \;=\; a_i \quad i = 1, \ldots, n$$

On peut alors écrire la relation (3.3.1)

$$R^i \;=\; \mathbb{E}[R^i] + b_{i,1}F_1 + \cdots + b_{i,k}F_k + \varepsilon_i \ , \quad i = 1, \ldots, n \ .$$

ou encore

$$R \;=\; \mathbb{E}[R] + bF + e \tag{3.3.6}$$

où R est le vecteur des rentabilités, b est la matrice $b = (b_{i,k})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq K}}$, F est le vecteur des facteurs et e est le vecteur des risques idiosyncratiques.

3.3.2 Nature des facteurs

Remarquons d'abord que le MEDAF aboutit à un modèle factoriel linéaire pour expliquer les rentabilités des actifs du marché : il s'agit d'un modèle à un seul facteur qui est la rentabilité du portefeuille de marché. Mais il faut noter que dans le contexte du MEDAF, le *facteur portefeuille de marché* se révèle de manière endogène par la dérivation du modèle. Dans le contexte des modèles factoriels, on *postule* que les rentabilités sont expliquées par un certains nombre de facteurs qui peuvent varier d'une économie à l'autre, d'une période à l'autre : la détermination de ces facteurs procède d'une démarche *essentiellement empirique*. On peut classer les modèles factoriels selon trois types : les modèles à facteurs macroéconomiques, fondamentaux ou statistiques.

les modèles factoriels macroéconomiques. Ces modèles expliquent les rentabilités des actifs à travers des variables macroéconomiques observables telles que le taux d'inflation, le taux de croissances de l'économie ou de certains secteurs de l'économie, la consommation agrégée, le taux de chômage . . . Dans ce type de modèles, les facteurs sont observables, mais les sensibilités $b_{i,k}$ doivent être estimées.

les modèles factoriels fondamentaux. Ces modèles sont basés sur l'observation des propriétés spécifiques des actifs, telles que la taille de l'entreprise émettrice, le taux de dividende, le ratio *book to market*, les classification sectorielles . . .
Dans le modèle de type Barra les sensibilités $b_{i,k}$ correspondent à des attributs de l'actif et les facteurs sont estimés. Par contre, dans les modèle du type Fama-French, les attributs des actifs sont utilisés pour définir les facteurs, les sensibilités $b_{i,k}$ sont alors estimées.

les modèles factoriels statistiques. Dans ce type de modèle on utilise des méthodes statistiques telles que l'analyse en composantes principales pour estimer les facteurs et les sensibilités. Ainsi, les facteurs sont traités comme des variables non-observables ou variables latentes. Ce type d'approche peut aboutir à des facteurs qui peuvent être interprétés comme des indices boursiers, mais parfois l'interprétation économique ou financière des facteurs résultant n'est pas évidente.

3.3.3 Absence d'opportunités d'arbitrage et relations fondamentales de l'APT

Opportunité d'arbitrage Un arbitrage est une stratégie financière qui *'ne coûte rien'* et permet de *'réaliser un gain sûr'* (c'est à dire qui ne comprend aucun risque de perte). Une opportunité de réaliser une stratégie d'arbitrage existe si on peut trouver un actif vendu sur deux marchés à deux prix différents.

Une grande partie de la théorie financière et des méthodes évaluation des actifs financiers sont basées sur l'hypothèse de l'absence d'opportunités d'arbitrage. L'idée qui sous-tend cette hypothèse est que si, à un moment donné, les prix de certains actifs sont tels qu'une opportunité d'arbitrage existe, un grand nombre d'agents réaliseraient instantanément des transactions en vue de l'exploiter, de sorte que les prix des actifs concernés convergeraient très rapidement vers des valeurs telles que l'opportunité d'arbitrage soit résorbée.

En réalité, des opportunités d'arbitrage peuvent exister, mais elles sont très faibles et d'une durée de vie très courte, ainsi l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage (AOA) est considérée raisonnable.

Relation fondamentale de l'APT. Dans sa forme la plus générale, l'APT stipule qu'il existe des réels $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_K$ tels que pour tout $i = 1, \cdots, n$

$$|\mathbb{E}[R^i] - (\lambda_0 + \lambda_1 b_{i,1} + \cdots + \lambda_K b_{i,K})| \leq \varepsilon , \tag{3.3.7}$$

où ε est une constante 'suffisamment petite'.

Quand le modèle factoriel vérifie les conditions (3.3.2) - (3.3.5), on peut montrer la **relation d'arbitrage exacte**

$$\mathbb{E}[R^i] = \lambda_0 + \lambda_1 b_{i,1} + \cdots + \lambda_K b_{i,K} , \tag{3.3.8}$$

pour tout $i = 1, \ldots, n$.

Quelques références :

1. Hamon, Jacques. (2005), *Bourse et Gestion de portefeuilles*, Economica.
2. Elton, E., M. Gruber, S. Brown & W. Goetzmann. (2003) *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis* Wiley.
3. Sharpe, F. William (1994), The Sharpe Ratio, The Journal of Portfolio Management.
   `http://www.stanford.edu/ ~wfsharpe/art/sr/sr.htm`
4. Fama E. & K. French The Capital Asset Pricing Model : Theory and Evidence
   CRSP Working Paper No. 550 ; Tuck Business School Working Paper No. 03-26
   `http://papers.ssrn.com/sol3/`
   `papers.cfm?abstract__id=440920`

Chapitre 4

Assurance de portefeuille

Le problème de choix de portefeuille a été abordé dans le chapitre précédent dans un cadre statique : l'investisseur forme un portefeuille financier à l'instant initial $t = 0$ puis ne réalise aucune transaction jusqu'à la date terminale $t = T$. Nous nous intéressons dans ce chapitre à des stratégies dynamiques, c'est à dire, des stratégies qui impliquent des révisions du portefeuille sur l'horizon de temps $[0, T]$.
La gestion dynamique regroupe une grande variété de techniques et de styles de gestion. Nous nous concentrons dans ce chapitre sur les stratégies dites d'*assurance de portefeuille*.

4.1 Assurance de portefeuille : définition

Quel produit permettrait de garantir aux portefeuilles financiers une valeur minimale même dans des conditions adverses du marché ?
En s'inspirant des travaux de Black et Merton sur l'évaluation d'options, Leland eut l'idée d'adjoindre des options de vente à un portefeuille de titres afin d'en garantir une valeur minimale 'en toute circonstance', les options pouvant être 'synthétisées' à partir d'actions et d'un actif sans risque par des positions

dynamiques adéquates. En 1976, Leland s'associa à Rubinstein pour mettre en place cette technique sous le nom d'*assurance de portefeuille*. Par la suite, sont apparues de nouvelles méthodes de gestion qualifiées de stratégies d'assurance de portefeuille. Elles entrent dans le cadre de la définition suivante.

Définition 4.1.1 *On désigne par stratégies d'assurance de portefeuille des stratégies financières dont le but est*

- *de limiter les pertes en cas de baisse des marché,*
- *tout en profitant du marché en cas de hausse.*

Nous allons présenter dans ce chapitre trois exemples importants de stratégies d'assurance de portefeuille :

- les stratégies utilisant les options (*Option Based Portfolio Insurance* - OBPI),
- la méthode du *Stop-Loss*,
- et enfin les stratégies à coussin multiple (*Constant Proportion Portfolio Insurance* - CPPI)

4.2 Stratégies utilisant des options

4.2.1 Rappels sur les options classiques

Une option, ou un *actif contingent*, est un actif pour lequel l'acheteur verse à la date initiale au vendeur une somme d'argent, dite *prime de l'option*, et reçoit en contrepartie, à une date future, un flux positif ou nul, appelé *valeur terminale* ou *payoff* de l'option. La valeur terminale de l'option dépend de l'évolution d'un actif (voire DE plusieurs actifs) appelé le *sous-jacent*.

Cette définition générale englobe une très large gamme d'options. Nous nous intéressons ici aux options classiques : *l'option d'achat* et *l'option de vente*.

L'option d'achat (call). Une option d'achat sur un actif S confère à son acheteur le droit (et n'impose pas l'obligation) d'acheter le sous-jacent S à une date future au prix K appelé *prix d'exerice* ou *strike*. Le prix d'exercice est fixé contractuellement à la date d'émission de l'option.
On dit que l'option d'achat est européenne lorsqu'elle ne peut être exercée qu'à la date de fin de contrat T. Cette date est appelée *maturité de l'option* ou *date d'exercice*. L'option d'achat est dite américaine lorsque l'acheteur a la possibilité de l'exercer à tout moment entre la date initiale et sa maturité T.
Ainsi la valeur terminale de l'option d'achat européenne sur l'actif S, de maturité T et de prix d'exercice K est

$$C(T, S, T, K) \;=\; \max(0, S_T - K) \;=\; (S_T - K)^+ \;.$$

L'option de vente (put). Une option de vente sur un actif S confère à son acheteur le droit (et n'impose pas l'obligation) de vendre le sous-jacent S à une date future au prix K appelé *prix d'exerice* ou *strike*. Le prix d'exercice est fixé contractuellement à la date d'émission de l'option.
On dit que l'option de vente est européenne lorsqu'elle ne peut être exercée qu'à la date de fin de contrat T. Cette date est appelée *maturité de l'option* ou *date d'exercice*. L'option d'achat est dite américaine lorsque l'acheteur a la possibilité de l'exercer à tout moment entre la date initiale et sa maturité T.
Ainsi la valeur terminale de l'option de vente européenne sur l'actif S, de maturité T et de prix d'exercice K est

$$P(T, S, T, K) \;=\; \max(0, K - S_T) \;=\; (K - S_T)^+ \;.$$

Relation de parité Call-Put. Considérons un portefeuille formé par l'achat d'une option d'achat européenne sur une action S de maturité T de prix d'exercice K et la vente d'une option de vente sur la même action de même maturité et de même prix d'exerice. La valeur terminale de ce portefeuille est

$$(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ \quad = \quad S_T - K$$

Ainsi la valeur terminale de ce portefeuille est égale dans tous les états du monde à la la valeur constituée par
– l'achat d'une action S,
– le placement d'un montant Ke^{-rT} au taux sans risque r (en composition continue).
Sous la condition d'absence d'oportunités d'arbitrage, les valeurs de ces deux portefeuilles sont égales à toutes les dates, d'où la relation de parité call-put :

$$C(t; S, T, K) - P(t; S, T, K) \quad = \quad S_t - Ke^{r(t-T)}$$

où $C(t; S, T, K)$ désigne le prix du call à la date t et $P(t; S, T, K)$ le prix du put à la date t.

4.2.2 Le montage de base

Considérons un portefeuille formé par une action S et une option de vente européenne sur l'action S de maturité T et de prix d'exercice K. La valeur de ce portefeuille à la date T est égale à

$$V_T \quad = \quad S_T + (K - S_T)^+ \; = \; \begin{cases} S_T & \text{si} \quad S_T \geq K \;, \\ K & \text{si} \quad S_T \leq K \;. \end{cases}$$

Ainsi, le prix d'exercice de l'option de vente est donc la valeur plancher du portefeuille. Le prix de cette option de vente peut être interprété comme la prime à payer assurant que la valeur du portefeuille ne chute pas en deça du placher K.

La mise en oeuvre de cette méthode d'assurance de portefeuille peut se heurter à plusieurs difficultés, les plus immédiates étant les suivantes :
– les options disponibles sur le marché sont le plus souvent américaines, donc

plus onéreuses que les options européennes,

– les caractéristiques des options disponibles sur le marché (date d'exercice, prix d'exercice) ne sont pas souvent en adéquation avec les objectifs de l'investisseur,

– les contraintes réglementaires peuvent limiter la quantité d'options pouvant être détenues dans le portefeuille.

Face à ces difficultés, l'idée proposée par Leland est d'utiliser un actif monétaire et le sous-jacent pour synthétiser le put.

4.2.3 Réplication du put : cadre du modèle binomial élémentaire

On suppose que le prix de l'action S à la date T peut prendre deux valeurs possibles

$$S_T(\omega_u) \;=\; S_0 u \quad \text{et} \quad S_T(\omega_d) \;=\; S_0 d\;.$$

On veut répliquer le put de valeur terminale $(K - S_T)^+$ par un portefeuille financier formé à partir de l'action S et d'un actif sans risque S^0. On suppose que le prix de l'actif sans risque vérifie :

$$S_0^0 = 1 \quad \text{et} \quad S_T^0 = 1 + r.$$

On suppose également que

$$d \;<\; 1 + r \;<\; d\;. \tag{4.2.1}$$

On considère des portefeuilles formés à la date initiale $t = 0$ et maintenus constant jusqu'à la date $t = T$. Ainsi, un portefeuille peut être décrit par le couple $(\alpha, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ où α représente le montant d'argent investi en S^0 et θ le nombre d'actions S détenues.

On note $V_t^{(\alpha,\theta)}$ la valeur du portefeuille (α, θ) à la date t. On a

$$\begin{aligned} x := V_0^{(\alpha,\theta)} &= \alpha + \theta S_0 \\ \text{et } V_T^{(\alpha,\theta)} &= \alpha(1+r) + \theta S_T \;=\; x(1+r) + \theta(S_T - S_0(1+r))\;. \end{aligned}$$

Un portefeuille $(\alpha, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ réplique le put si et seulement si $V_T^{(\alpha,\theta)} = (K - S_T)^+$ dans tous les états du monde, c'est à dire

$$\begin{cases} \alpha(1+r) + \theta S_T(\omega_u) & = & P(\omega_u) \ := \ (K - S_T(\omega_u))^+ \ , \\ \alpha(1+r) + \theta S_T(\omega_d) & = & P(\omega_d) \ := \ (K - S_T(\omega_d))^+ \ . \end{cases}$$

La stratégie de réplication est donc donnée par

$$\begin{aligned} \alpha^\star &= \frac{1}{1+r} \frac{P(\omega_d) S_T(\omega_u) - P(\omega_u) S_T(\omega_d)}{S_T(\omega_u) - S_T(\omega_d)} \ , \\ \theta^\star &= \frac{P(\omega_u) - P(\omega_d)}{S_T(\omega_u) - S_T(\omega_d)} \ . \end{aligned}$$

Le capital initial permettant de réaliser cette stratégie est

$$\begin{aligned} x^\star &= \alpha^\star + \theta^\star S_0 \\ &= \frac{1}{1+r} \left(\frac{u - (1+r)}{u-d} P(\omega_d) + \left(1 - \frac{u-(1+r)}{u-d} \right) P(\omega_u) \right) \ . \end{aligned}$$

4.2.4 Réplication du put : cadre du modèle de Cox-Ross-Rubinstein

On considère le marché financier entre les dates $t = 0$ et $t = T$ et on suppose que les investisseurs peuvent intervenir aux dates $t_k = k\frac{T}{N}$, avec $k = 0, \ldots, N-1$.

• Le prix de l'actif sans risque est supposé évoluer suivant le taux d'intérêt r :

$$S^0_{t_k} \ = \ (1+r)^k$$

pour tout $k = 0, \ldots, N$.

• Le prix de l'action S est décrit par le modèle suivant : on considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et une suite de variable aléatoire i.i.d $(\xi_k)_{1 \le k \le N}$ telle que

$$\mathbb{P}[\xi_1 = 1] \ = \ \mathbb{P}[\xi_1 = -1] \ = \ 1/2 \ ,$$

et on suppose que le prix de S est décrit par

$$S_{t_k} \ = \ S_0 \exp \left\{ \sigma \sum_{i=1}^{k} \xi_k \right\}$$

où σ est une constante strictement positive donnée telle que

$$\exp(-\sigma) \ < \ 1+r \ < \ \exp(\sigma) \ .$$

Cette condition garentit l'absence d'opportunité d'arbitrace dans ce modèle. Les prix des biens contingents sont alors déterminés de manière unique. • On considère des portefeuilles formés à partir de l'action S et de l'actif sans risque S^0. Un tle portefeuille est décrit par une suite finie de variables aléatoires $\{(\alpha_k, \theta_k), k = 0, \ldots, N-1\}$ où

– α_k représente le montant d'argent investi en S^0 à la date t_k,

– θ_k représente le nombre d'unités de l'action S détenues dans le portefeuille à la date t_k.

Stratégies adaptées. On considère la filtration $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_k, k = 0, \ldots, N\}$ définie par

$$\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_k = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_k), \ k = 1, \ldots, N$$

Une stratégie financière est un processus $(\alpha, \theta) := \{(\alpha_k, \theta_k), 0 \leq k \leq N-1\}$ adapté à la filtration $\mathbb{F}$.

Condition d'autofinancement. On note $V_t^{(\alpha,\theta)}$ la valeur à la date t de la stratégie adaptée (α, θ). On a

$$V_{t_k}^{(\alpha,\theta)} \quad = \quad \alpha_{t_k} + \theta_k S_{t_k}$$

pour tout $k = 0, \ldots, N-1$.

On dit que la sratégie (α, θ) vérifie la condition d'autofinancement si

$$V_{t_{k+1}}^{(\alpha,\theta)} \quad = \quad V_{t_k}^{(\alpha,\theta)}(1+r) + \theta_k \left(S_{t_{k+1}} - S_{t_k}(1+r)\right)$$

pour tout $k = 0, \ldots, N-1$.

Stratégie de réplication autofinancée du put. Posons $u := e^{\sigma}$ et $d = e^{-\sigma}$ et considérons l'arbre binomial décrivant la dynamique du prix de l'action S : on note pour $0 \leq i \leq k \leq N$

– n_k^i le nœud de la date t_k où le prix de l'action vaut $S_0 e^{(2i-k)\sigma} = S_0 u^i d^{k-i}$,
– $(\alpha^{k,i}, \theta^{k,i})$ la stratégie de portefeuille au noeud n_k^i,
– $P^{k,i}$ le prix du put au nœud n_k^i,
– $S^{k,i}$ le prix de l'action au nœud n_k^i : $S^{i,k} = S_0 u^i d^{k-i}$.

Une stratégie de réplication adaptée et autofinancée est donnée par

$$\alpha^{k,i} = \frac{1}{1+r} \frac{S^{k+1,i+1} P^{k+1,i} - S^{k+1,i} P^{k+1,i+1}}{S^{k+1,i+1} - S^{k+1,i}}$$

et

$$\theta^{k,i} = \frac{P^{k+1,i+1} - P^{k+1,i}}{S^{k+1,i+1} - S^{k+1,i}} .$$

pour tout $0 \leq i \leq k \leq N$.

4.3 Stratégies Stop-Loss

La méthode du Stop-Loss peut être considérée comme la méthode la plus simple d'assurance de portefeuille. Elle est illustrée à travers l'exemple simple suivant.

On note x la richesse initiale d'un investisseur. Le montant x est réparti entre un actif sans risque S^0 et un actif risqué S. On note $V(t)$ la valeur à la date t de ce portefeuille. La méthode du Stop-Loss consiste à

– liquider l'intégralité de S pour acheter S^0, dès que $S^0(t) > S(t)$,
– liquider la totalité de S^0 pour acheter S dès que $S(t) > S^0(t)$.

On garantit ainsi que $V(t) \geq S^0(t)$.

En pratique, la mise en place de stratégie peut entraîner des coûts de transactions prohibitifs, notamment si le prix de S oscille aux alentours de $S^0(t)$. On peut alors penser à fixer un intervalle autour de $S^0(t)$ et ne changer la composition du portefeuille que lorsque $S(t)$ sort de cet intervalle.

4.4 Méthodes du coussin multiple

Un investisseur réparti sa richesse initiale $x > 0$ entre un actif sans risque S^0 et un actif risqué S.

– L'investisseur choisit une valeur plancher P pour la valeur actualisée $\tilde{V}_t = V_t/S^0_t$ de son portefeuille. On appelle *coussin* la différence : $C_t := V_t - PS^0_t$.

– Il fixe ensuite le montant qui sera alloué à l'actif risqué. Dans cette méthode ce montant est choisi de la forme $m * C_0$ avec $m \geq 1$, le facteur m s'appelle le *multiple*.

– Notons par δ le pas de temps et supposons que l'investisseur réactualise son portefeuille à chaque instant δk, $k \geq 0$. On suppose que l'investisseur réalloue son portefeuille de manière à ce que la montant investi dans l'actif risqué à chaque date δk soit égal à $mC_{\delta k}$.

On peut alors vérifier que à chaque date $t_k := \delta k$, la valeur du portefeuille vérifie

$$V_{t_k} - P_k \quad = \quad (x - P)\prod_{i=1}^{k}(1 + r + m(R_i - r))$$

où r est la rentabilité de l'actif sans rique sur l'intervalle de temps δ, $P_k := P(1+r)^k$ et R_i est la rentabilité de l'actif risqué entre les dates t_{i-1} et t_i.

Quelques références :

1. E. Bouyé (2009), *Portfolio Insurance : a short introduction*, Financial Analysts Journal.

2. H. E. Leland and M. Rubinstein (1988), *The evolution of portfolio insurance*, in Dynamic hedging : a guide to Portfolio insurance, ed. by Don Luskin, John Wiley and Sons.

3. P. Poncet et P. Portait (1997), *'L'assurance de portefeuille'*, *Encyclopédie de la Gestion*, Y. Simon éd., Economica, tome 1.

Annexe A

Rappels sur l'optimisation sous contrainte

On considère le problème d'optimisation

$$\left\{\begin{array}{l} \text{optimiser localement sur } \mathbb{R}^d \;\; f(x) \\ \text{sous la contrainte } \;\; h(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ \vdots \\ h_m(x) \end{pmatrix} = 0 \end{array}\right. \tag{B.1}$$

Définition B.1 *On dit que la contrainte h est régulière au point $x^\star$ de $\mathbb{R}^d$, si les vecteurs $(Dh_1(x), ..., Dh_2(x))$ forment un système libre.*

On introduit le Lagrangien du problème d'optimisation (B.1)

$$\mathcal{L}: \; (x, \lambda) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \mapsto f(x) + \lambda_1 h_1(x) + \cdots + \lambda_m h_m(x) \; .$$

Condition nécessaire d'optimalité. Soit $x^\star$ une solution du problème (B.1) ($x^\star$ est soit un minimum local, soit un maximum local). On suppose de plus que la contrainte est régulière au point $x^\star$, alors il existe des réels $\lambda_1^\star, \ldots, \lambda_m^\star$ tels que

$$D\mathcal{L}\,(x^\star, \lambda_1^\star, \cdots, \lambda_m^\star) \;\;=\;\; 0 \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \; .$$

Le point $x^\star$ est dit *point stationnaire* pour (B.1). Les réels $\lambda_1^\star, \dots, \lambda_m^\star$ sont appelés les *multiplicateurs de Lagrange* au point $x^\star$. $\square$

Condition suffisante d'optimalité locale. Soit $x^\star$ un point stationnaire pour (B.1), et $\lambda_1^\star, \dots, \lambda_m^\star$ les multiplicateurs de Lagrange associés. On suppose de plus que la contrainte h est régulière au point $x^\star$.

– Si pour tout $y \in \mathbb{R}^d \setminus 0$, on $y'\, D_x^2 \mathcal{L}\,(x^\star, \lambda^\star)\, y > 0$, alors $x^\star$ est un minimum local.

– Si pour tout $y \in \mathbb{R}^d \setminus 0$, on $y' D_x^2 \mathcal{L}\,(x^\star, \lambda^\star)\, y < 0$, alors $x^\star$ est un maximum local.

Condition suffisante d'optimalité globale. Soit $x^\star$ un point stationnaire pour (B.1), et $\lambda_1^\star, \dots, \lambda_m^\star$ les multiplicateurs de Lagrange associés. On suppose de plus que la contrainte h est régulière au point $x^\star$.

– Si le Lagrangien est une fonction convexe, alors $x^\star$ est un minimum global.

– Si le Lagrangien est une fonction concave, alors $x^\star$ est un maximum global.