

Résumé du cours sur les séries de Fourier

Définition

La série de Fourier associée à une fonction f continue par morceaux et T -périodique est :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \quad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right)$$

où $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt$ et $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt$

Convergence

Si f est continue et dérivable sur $[0; T]$ sauf en un nombre fini de points en lesquels les limites à droites et à gauche (si elles ont un sens) de f et de sa dérivée f' sont des réels

alors la série de Fourier de f converge.

La somme S de la série est définie par : $S(t) = f(t)$ si f est continue en t et $S(t) = \frac{f(t_-) + f(t_+)}{2}$ si f est discontinue en t .

Propriétés

P1 : les coefficients sont indépendants de l'intervalle d'amplitude T sur lequel on calcule les intégrales.

P2 : si f est paire alors tous les b_n sont nuls, $a_0 = 2 \times \frac{1}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt$ et $a_n = 2 \times \frac{1}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt$

P3 : si f est impaire alors tous les a_n sont nuls et $b_n = 2 \times \frac{1}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt$

P4 : Parseval $\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$

Complexes

Les coefficients complexes de Fourier sont les $c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt$ où $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \text{ valable pour } n \in \mathbb{Z}^* \text{ et } c_n = a_0$$

La série de Fourier s'écrit alors : $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t) e^{in\omega t}$

Spectre

On appelle spectre le diagramme en bâton représentant $|c_n|$ en fonction de n . Comme il est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on dessine souvent le demi-spectre.

Astuces

$$\cos(nt) = (-1)^n \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

$$\sin(nt) = 0 \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$