On appelle *période* d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tout nombre réel T tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}\,,\ f(t+T) = f(t)\,.$$

On dit que f est *périodique* si elle admet une période non nulle, et plus précisément qu'elle est *T-périodique* si T est une période strictement positive.
L'ensemble $\mathscr{F}_T := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\ ;\ \forall t \in \mathbb{R}\,,\ f(t+T) = f(t)\}$ des fonctions T-périodiques est un *espace vectoriel*, de même que, quel que soit $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathscr{F}([a, a+T[)$ des fonctions $g : [a, a+T[\to \mathbb{C}$, et l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}_T & \to & \mathscr{F}([a,a+T[) \\ f & \mapsto & f_{|[a,a+T[} \end{array}$$

est un *isomorphisme* d'espaces vectoriels.
Une fonction T-périodique est dite de *classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux* ($k \in \mathbb{N}$) si sa restriction au segment $[0, T]$ est de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux, c'est-à-dire s'il existe une *subdivision* $(a_0, \ldots, a_n)$ de $[0, T]$ telle que, pour tout $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, la restriction de $f_{]a_j,a_{j+1}[}$ admette un *prolongement* de classe $\mathscr{C}^k$. (La fonction tan *n'est pas* continue par morceaux.) Si g est de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux ($k \in \mathbb{N}$) sur un segment $[a, a+T]$, il existe une unique fonction f qui soit T-périodique, de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux et coïncidant avec g sur $[a, a+T[$. (En général, f est «seulement» de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux même si g est de classe $\mathscr{C}^k$.)

- Toute fonction périodique *continue par morceaux* est bornée.
- Toute fonction périodique continue est *uniformément continue*.
- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-périodique et continue par morceaux. Alors pour tout réel a on a

$$\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t\,.$$

Étant données deux fonctions f et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-périodiques et continue par morceaux, on note

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f(t)}g(t)\mathrm{d}t\,, \quad \|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f\rangle}\,,$$

et l'on a :

$$\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2 (\textit{inégalité triangulaire}), |\langle f, g\rangle| \leq \|f\|_2\,\|g\|_2 (\textit{inégalité de Cauchy–Schwarz}).$$

Si l'on note $E_n : t \mapsto \mathrm{e}^{int}$ pour $n \in \mathbb{Z}$, $C_n : t \mapsto \cos(nt)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $S_n : t \mapsto \sin(nt)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, la famille de fonctions $\{E_n\ ;\ n \in \mathbb{Z}\}$ est *orthonormée* dans l'espace $\mathscr{C}^0_{2\pi}$ des fonctions continues 2π-périodiques muni de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ pour $T = 2\pi$, et la famille $\{C_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{S_n\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\}$ est *orthogonale* dans ce même espace, avec

$$\|C_0\|_2 = 1\,,\ \|C_n\|_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \forall n \in \mathbb{N}^*\,, \quad \|S_n\|_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

On appelle *polynôme trigonométrique* toute *combinaison linéaire* (finie) d'éléments de la famille $\{E_n\ ;\ n \in \mathbb{Z}\}$. Pour tout polynôme trigonométrique P, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$P = \sum_{n=-p}^{p} c_n E_n\,, \quad c_n := \langle E_n|P\rangle\,,$$

NB: Il faut savoir *définir* les notions en *rouge* et démontrer les énoncés en bleu.

ou de façon équivalente,

$$P = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{p}(a_n C_n + b_n S_n)\,, \quad a_n := c_n + c_{-n} = 2\langle C_n|P\rangle\,,\ b_n := i(c_n - c_{-n}) = 2\langle S_n|P\rangle\,.$$

On a de plus

$$\|P\|_2^2 = \sum_{n=-p}^{p}|c_n|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p}(|a_n|^2 + |b_n|^2)\,.$$

On appelle *série trigonométrique* toute *série de fonctions* de la forme $\Sigma(c_n E_n + c_{-n}E_{-n})$, avec $c_n \in \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, que l'on note généralement comme une *série bilatère* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n E_n$. (Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté on omet d'écrire $n \in \mathbb{Z}$.)
Une série trigonométrique $\sum c_n E_n$ est *normalement convergente* si et seulement si la série numérique $\sum(|c_n| + |c_{-n}|)$ converge, ou de façon équivalente, la série numérique $\sum_{n\geq 1}(|a_n| + |b_n|)$ définie par $a_n := c_n + c_{-n}\,,\ b_n := i(c_n - c_{-n})$, converge.
Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique et continue par morceaux, on définit ses *coefficients de Fourier* par

$$c_n(f) := \langle E_n|f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,,$$

$$a_n(f) := 2\,\langle C_n|f\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

$$b_n(f) := 2\,\langle S_n|f\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

de sorte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)\,,\ b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))\,,$$

$$c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2}\,,\ c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}\,.$$

- ✓ Si f est à valeurs *réelles*, ses coefficients trigonométriques $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont *tous réels.*
- ✓ Si f est *paire*, ses coefficients $b_n(f)$ sont *tous nuls.*
- ✓ Si f est *impaire*, ses coefficients $a_n(f)$ sont *tous nuls.*
- ✓ Si $\overline{f} : t \mapsto \overline{f(t)}$, $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$.
- ✓ Si $\check{f} : t \mapsto f(-t)$, $c_n(\check{f}) = c_{-n}(f)$.
- ✓ Si $f_a : t \mapsto f(t+a)$ (avec $a \in \mathbb{R}$), $c_n(f_a) = \mathrm{e}^{ina}\,c_n(f)$.
- ✓ On a : $|c_n(f)| \leq \|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$, où $\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|\,\mathrm{d}t$, $\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$, $\|f\|_\infty = \max\{|f(t)|\,;\, t \in [0, 2\pi]\}$.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique et continue par morceaux, on définit sa *série de Fourier* comme la série trigonométrique $\sum c_n(f)E_n$, qu'on écrit souvent [1]

$$\sum c_n(f)\mathrm{e}^{int}\,, \quad \text{ou encore } \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n(f)\,cos(nt) + b_n(f)\,\sin(nt))\,.$$

1. avec le même abus de notation que pour les séries entières, sans flèche bien que ce soit une série de fonctions et non une série numérique.

En notant $\mathsf{S}_p(f)$ les sommes partielles de sa série de Fourier, c'est-à-dire

$$\mathsf{S}_p(f) : t \mapsto \sum_{n=-p}^{p} c_n(f)\mathrm{e}^{int} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{p}(a_n(f)\, cos(nt) + b_n(f)\, \sin(nt)),$$

on a, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\langle f - \mathsf{S}_p(f)|E_m\rangle = 0$ quel que soit $m \in \mathbb{Z}$ tel que $|m| \leq p$. En particulier, $\langle f - \mathsf{S}_p(f)|\mathsf{S}_p(f)\rangle = 0$, ce qui implique l'*inégalité de Bessel* :

$$\|\mathsf{S}_p(f)\|_2 \leq \|f\|_2 .$$

De plus, les séries numériques $\sum |c_n(f)|^2$ (bilatère) et $\sum(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$ convergent et l'on a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) \leq \|f\|_2^2 .$$

Par suite, $\lim_{|n|\to+\infty} c_n(f) = 0\,, \quad \lim_{n\to+\infty} a_n(f) = 0\,, \quad \lim_{n\to+\infty} b_n(f) = 0\,.$

Lemme de Riemann-Lebesgue. Si f est une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ alors on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\, \mathrm{e}^{int}\, \mathrm{d}t = 0 .$$

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^k$ (pour $k \in \mathbb{N}$) alors ses coefficients de Fourier vérifient $c_n(f^{(k)}) = (in)^k\, c_n(f)$, et par conséquent

$$c_n(f) = o\Big(\frac{1}{|n|^k}\Big), \quad |n| \to +\infty .$$

Si une série trigonométrique $\sum \gamma_n E_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ alors sa somme f est continue, 2π-périodique, et ses coefficients de Fourier sont précisément $c_n(f) = \gamma_n$.

Théorème de Dirichlet. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique, continue par morceaux, et telle que

$$t \mapsto \frac{f(t) - f(t_0^-)}{t - t_0} \quad \text{et} \quad t \mapsto \frac{f(t) - f(t_0^+)}{t - t_0}$$

ont une limite respectivement quand $t \nearrow t_0$ et quand $t \searrow t_0$, où $f(t_0^-)$ désigne la limite à gauche de f en t_0 et $f(t_0^+)$ sa limite à droite, alors la série de Fourier de f converge en t_0 et

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\mathrm{e}^{int_0} = \frac{f(t_0^-) + f(t_0^+)}{2} .$$

Théorème de convergence normale. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique, de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux *et* continue alors la série de Fourier de f est normalement convergente et sa somme est f.

Théorème de Parseval. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique et continue par morceaux alors la suite des sommes partielles $(\mathsf{S}_p(f))_{p\in\mathbb{N}}$ de la série de Fourier de f est telle que

$$\lim_{p\to+\infty} \|\mathsf{S}_p(f) - f\|_2 = 0 ,$$

et

$$\lim_{p\to+\infty} \|\mathsf{S}_p(f)\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) = \|f\|_2^2 .$$

NB: Il faut savoir *définir* les notions en *rouge* et démontrer les énoncés en bleu.

Théorème d'approximation en moyenne quadratique. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique et continue par morceaux, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique P tel que

$$\|f - P\|_2 \leq \varepsilon\,.$$

Théorème de Weierstrass trigonométrique. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique et continue, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique P tel que

$$\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon\,.$$