TD 1 : Dauphine 03/10/2011

lundi

102 Bis

UE math = UE.15 (prérentrée) + UE 13 (BEY).

$$UE = \begin{cases} (UE.15) \times \frac{1}{2} \\ (UE.13) \times 1 \end{cases}$$

(UE.13) = { 1er Devoir contrôle, 2e C.C. } moyenne de C.C coefficient $\left(\frac{1}{2}\right)$

\+

note examen final coefficient $\left(\frac{1}{2}\right)$

Trois absence, sinon 0 examen C.C.

assiduité de l'étudiant.

Déf :

Soit f une fonct définie, conti et dérivable sur voisinage de $a \in \mathbb{R}$.

On appelle différentielle de f au pt a

$$df_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$h \longmapsto df_a h = f'(a) h.$$

Rq : Question : à Relation entre le différentiel et l'angle absolu ?

Développement limité d'ordre 1 :

(voir Exple ; 7,5)

Théo :

Remarque : dans le cas on a une fonction affine $df_a = \Delta f$. Pour les autres fonctions, l'égalité n'est pas vraie.

On considère une fonction définie, conti sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}$.

La fonction f est dérivable $\overset{ssi}{\Longleftrightarrow}$ Il existe une fonction ε définie sur un voisinage V de 0 et conti en 0 (càd $\varepsilon(0) = 0$)

et pour $x \in \mathbb{R}$.

$$x - a \in V \Rightarrow f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + (x-a)\,\varepsilon(x-a).$$

Rq : On sait ε est conti en 0. $\varepsilon(0) = 0$

$$\lim_{x \to a} \varepsilon(x-a) = \lim \varepsilon(0) = 0.$$

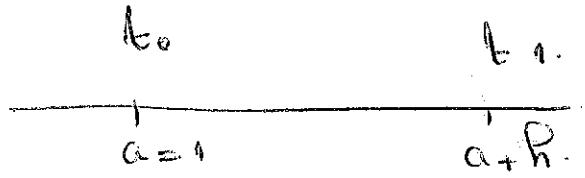
Différentielle et Approximation affine.

1) Variation absolue et différentielle

Déf :

Soit f une fonction définie sur un voisinage d'un réel a. On appelle accroissement ou variation absolue de la fonction f. la valeur suivante

$$\Delta f_a(h) = f(a+h) - f(a).$$



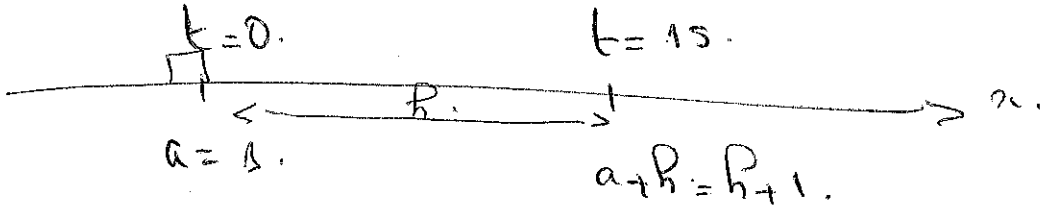
Exple : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$

$a \in \mathbb{R}$: $\Delta f_a(h) = (a+h)^2 - a^2$
$= 2a + h^2$

$a = 1$ $\quad \Delta f_1(h) = 2 + h^2$.

Comme application dans la vie courante.

Ex Si on a une voiture



$$\Delta V_1(h) = V(1+h) - f(1).$$

Variation de la vitesse moyenne d'une voiture

· Approximation affine :

Soit f une fonction définie sur un voisinage de a tq.

$f'(a)$ existe

On appelle approximation affine :

$$\hat{f}_a(x) = f(a) + (x-a) f'(a).$$

$$= f(a) + x f'(a) - a f'(a)$$

$$= \underbrace{f'(a)}_{\alpha} x + \underbrace{f(a) - a f'(a)}_{\beta}.$$

$$\hat{f}_a(x) = \alpha x + \beta.$$

Rq : On sait que la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$,

$$y : f(a) + f'(a)(x-a).$$

Exemple 1 :

$f(x) = \exp x.$

$a = 0.$

$$\hat{\exp}_0(x) = e^0 + (x-0) e^0.$$

$$= 1 + x.$$

Calculs approchés :

Soit f une fonction affine, c'à d.

$f(x) = \alpha x + \beta$.

$$\Delta f_a(h) = f(a+h) - f(a)$$
$$= \alpha(x+h) + \beta - (\alpha x + \beta)$$
$$= \alpha h.$$

$$df_a(h) = f'(a)h = \alpha h.$$

On voit $\boxed{df_a(h) = \Delta f_a(h)}$ vrai si f est affine

Si f une fct quelconque : ??

Théo :

Soit f une fonction dérivable au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.
dérivable on a :

pour $h \ll 1$. $\Delta f_a(h) \simeq df_a(h)$.

c'à d $f(a+h) - f(a) \simeq f'(a)h$.

et on définit l'erreur absolue :

$$\Delta f_a(h) - df_a(h).$$

$$\Delta f_a(h) = f(a+h) - f(a)$$

$$= (a+h)^3 - 3(a+h)^2 + 6(a+h) - a^3 + 3a^2 - 6a$$

$$= a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 3a^2 - 6ah - 3h^2 + 6a + 6h - a^3 + 3a^2 - 6a$$

$$= a^3 + \boxed{3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 6ah - 3h^2 + 6h}$$

~~$\Delta f_{-1}(h) = 3h - 3h^2 + h^3 + 6h - 3h^2 + 6h$~~

~~$= 12h - 6h^2 + h^3$~~

$= h(h^2 - 6h + 12)$.

$$\Delta f_{-1}(h) = 3h - 3h^2 + h^3 + 6h - 3h^2 + 6h$$

$$= 15h - 6h^2 + h^3.$$

$$\Delta f_1(h) = 3h + 3h^2 + h^3 - 6h - 3h^2 + 6h$$

$$= h^3 + 3h.$$

(Rq: Egale h plus haut grad.)

$$\text{Erreur} = \Delta f_a(h) - df_a(h)$$

$$= 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 6ah - 3h^2 + 6h - 3a^2h + 6ah - 6h$$

$$= 3ah^2 + h^3 - 3h^2.$$

Ex 1.22 1,23 1,24 (3)

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x$. $a \in \mathbb{R}$.

1). , Il est très clair que $f(x)$ est un polynome de $\mathbb{R}$.

par conséquent $f(x)$ est de C^1.

2). $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
$x \longmapsto f'(x)$.

$df_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
$h \longmapsto df_a(h) = f'(a).h$.

3). $h \in \mathbb{R}$.

$df_a(h) = f'(a)\, h$.

Or $f'(x) = 3x^2 - 6x + 6$.

Si on prend $a = 1$. $f'(1) = 3 - 6 + 6 = 3$.

$df_a(h) = f'(1)\, h = 3h$.

* $a = -1$. $f'(-1) = 3 + 6 + 6 = 15$.

$df_{-1}(h) = f'(-1)\, h = 15h$.

$df_a(h) = 3a^2 h - 6ah + 6h$.

CH8 : Calculs appliqués des variations.

1) Un des problèmes fondamentaux en Economie est la mesure des effets de la variation d'une variable économique sur une autre.

1) Fonction moyenne :

Déf :

Soit f une fonction économique positive (production, coût, demande) dépendant de la variable $x \in]0, +\infty[$ (quantité, prix). La fonction moyenne, notée f_M, est définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f_M(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

2) Fonction marginale et variation absolue.

Déf :

Soit f une fonction économique définie, positive et dérivable sur $]0, +\infty[$. La fonction marginale notée f_m est définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f_m(x) = f'(x)$$

Variation absolue :

Proposition : Soit une fonction économique (production, coût) définie sur $]0, +\infty[$ à valeurs positives, dérivable et dépendant de la variable x (quantité, prix)
Si la variable x varie de a à $a+\Delta x$, alors la variation absolue de f est égale au produit de la fonction marginale (calculée au pt considéré a) par l'accroissement de la variable

$$\Delta f_a(\Delta x) = f(a+\Delta x) - f(a) \simeq f_m(a)\,\Delta x.$$

2.) Variation relative et élasticité

Déf. Soit une fonction économique définie sur $]0, +\infty[$, strictement positive et dérivable dépendant de la variable x. On appelle élasticité de f la fonction définie par :

$\forall x \in]0, +\infty[$

$$e_f(x) = f'(x)\frac{x}{f(x)} = x \times \left(\ln(f(x))\right)'$$

	Valeur exacte	Valeur approchée
Variation absolue	$\Delta_a f(\Delta x) = f(a+\Delta x) - f(a)$	$f'(a)\,\Delta x$
Variation relative	$\dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$	$ef(a) \times \dfrac{\Delta x}{a}$

	taux moyen	taux instantané
taux d'accroissement absolu	$\dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$	$f'(a)$
taux d'accroissement relatif	$\dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \times \dfrac{1}{f(a)}$	$\dfrac{f'(a)}{f(a)} = \ln'(f(a))$
taux de variation relative	$\dfrac{\dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{f(a)}}{\dfrac{\Delta x}{a}}$	$ef(a) = f'(a) \times \dfrac{a}{f(a)}$

Continuité de la composition à gauche.

Soit $f = h \circ g$.

$$f : E \subset D_g \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{h} B$$
$$(x,y) \longmapsto g(x,y) = X \longmapsto h(X) = h(g(x,y)).$$

$\begin{cases} h \text{ est fonction continue sur } g(E) \subset \mathbb{R} \\ g \text{ " " " " } E. \end{cases}$

Alors $f = h \circ g$ est continue sur E.

<u>Lemme d'extension</u>

Soit $g : \mathbb{R} \; J \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
$$x \longmapsto g(x).$$

La fonction $g_1(x,y) = g(x)$ $\forall x \in J$, $y \in \mathbb{R}$.
continue sur $J \times \mathbb{R}$.

La fonction $g_2(x,y) = g(y)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $y \in J$.
continue sur $\mathbb{R} \times J$.

Continuité sur un sous-ensemble de D_f.

Soit f une fonction définie sur $D_f \subset \mathbb{R}^2$.

f est continue sur $\mathcal{D}_f$, si f est continue en tout pt de $\mathcal{D}_f$.

Opération algébriques

Soient $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. continue sur $\mathcal{D}$.

$g : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. continue sur $\mathcal{D}$

Alors $f+g$, $f-g$, λf, fg $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

sont continue sur $\mathbb{R}$.

de plus si $g \neq 0$ sur $\mathcal{D}$, $\frac{f}{g}$ sur cette $\mathcal{D}$.

Corollaire * toute fonction polynome ~~à deux~~ de $\mathbb{R}^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

* toute fonction rationnelle (~~Quot.~~ ou Quotient de polynome est continue sur $\mathcal{D}$.

$f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

La fonction f est dite continue en a si

$$\left\{ \forall \varepsilon > 0 \,,\ \exists \eta > 0 \text{ tq } \forall x \in I \,,\ |x - a| < \eta \right.$$

$$\text{alors } \left| f(x) - f(a) \right| < \varepsilon \ \Big|$$

TD 5 Extrema

Si on dit extrêmum, c.à.d soit un minimum, soit un maximum.

Déf: Extrêmum globale

Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x)$

Soit $E \subset D_f$, et $a \in E$; $\forall x \in E$.

Si $f(x) - f(a) \leq 0 \iff f(x) \leq \underset{max}{f(a)}$

On dit que f admet un maximum globale $\forall x \in E$.

* Si $f(x) - f(a) \geq 0 \iff f(x) \geq \underset{min}{f(a)}$

On dit que f admet un minimum globale $\forall x \in E$.

Déf: Extrêmum locale

$f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ $E \subset D_f$

$x \longmapsto f(x)$

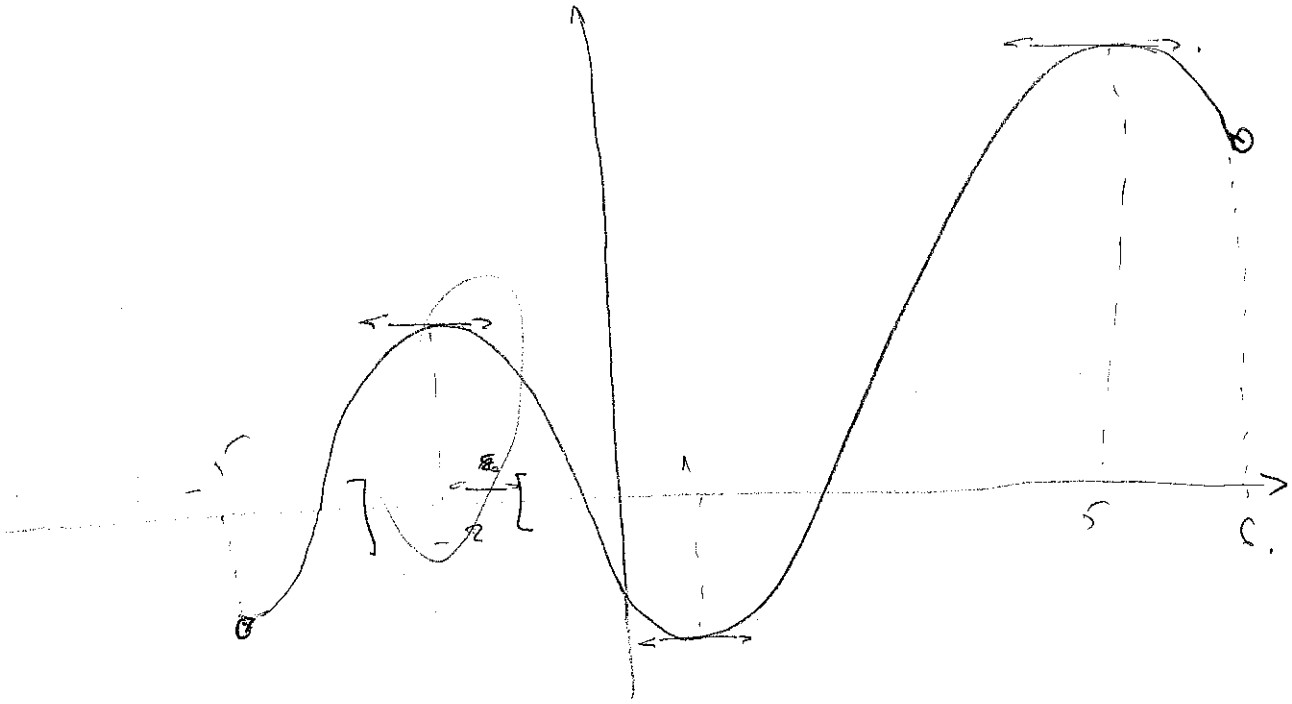
Soit $E \subset D_f$ et $a \in E$ tq $x \in]a-r, a+r[\cap E, r>0$

Si $f(x) - f(a) \leq 0 \iff f(x) \leq \underset{max}{f(a)}$

On dit que f admet un max locale $\forall x \in]a-r, a+r[\cap E$

Si $f(x) - f(a) \geq 0 \iff f(x) \geq \underset{min}{f(a)}$

On dit que f admet un min locale $\forall x \in]a-r, a+r[\cap E$



$f :]-5, 6[\longrightarrow \mathbb{R}$

au pt. -2. max local. $x \in]-2-r, -2+r[$.

2 au pt. 2 min local
min global

au pt 5. min local
max global

Rq :

Dans tout le cours j'ai pris I un ouvert tq $I \subset \mathcal{D}_f$.

le fait que I ouvert est C.N. :

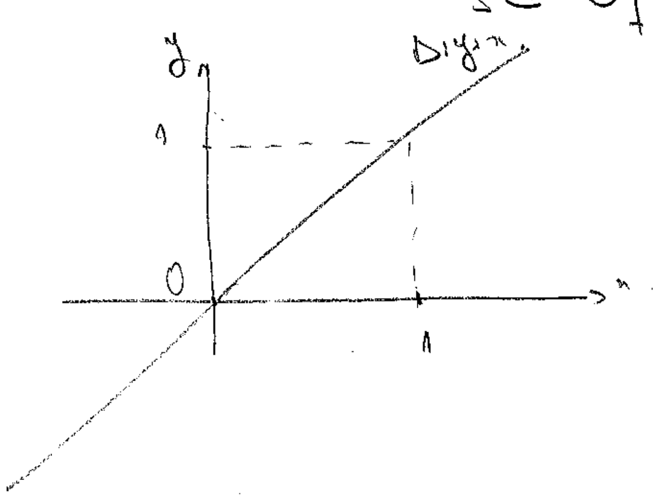
<u>Contre exemple:</u>

On prend $I = [0,1]$.

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. $\mathcal{D}f = \mathbb{R}$.

$x \longmapsto x$.

$I \subset \mathcal{D}f$ (c-à-d $[0,1] \subset \mathbb{R}$).



unitile

f de C^1 sur $[0,1]$.

$f'(x_0) = 1$. donc $f'(0) = 1$.

Or si on résonne graphiquement

Graphiquement : On voit très bien que f admet un min au pt 0 et un max. au pt 1.

au pt 0 min $\Longrightarrow$ $f'(0) = 0$ absurde.

du coup vous voyez l'influence de la condition que I soit un ouvert sur notre Théorie du Recherche des Extrema.

Théorème :

$f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ tq $I \subset D_f$ tq f de C^1 et $f'(a) = 0$.

* Si f convexe sur I.

Pour $(+\infty)$ et $(-\infty)$

II. Fonction dérivable sur un intervalle ouvert

Soit $I =]a,b[$; ouvert

Condition nécessaire :

<u>Théo</u>

Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ tq $I \subset D_f$

f dérivable sur I ; tq $a \in I$

Soit $a \in I$:

Si f admet un extrémum sur I $\Longrightarrow$ $f'(a) = 0$

Attention.

La réciproque est fausse !!

c'à d si $f'(a) = 0$ $\not\Rightarrow$ f admet un extremum.

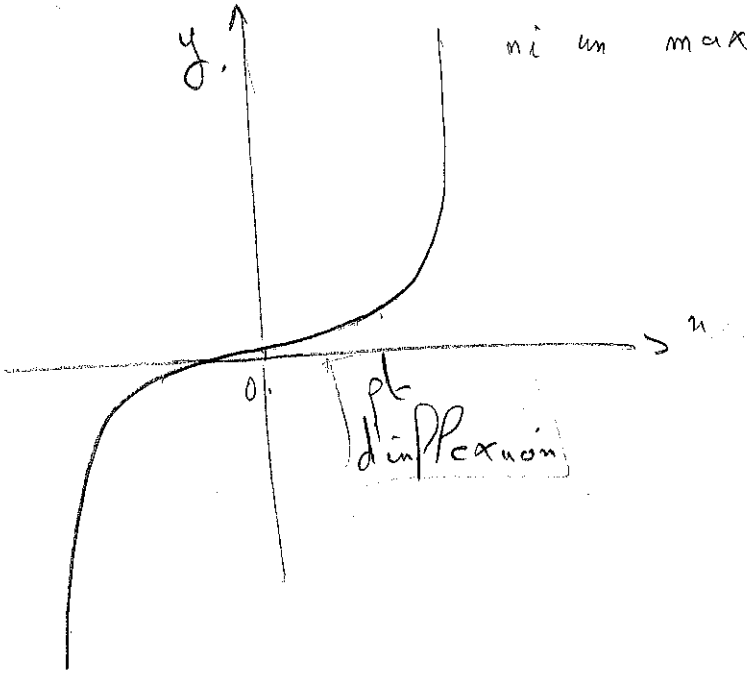
Contre exemple :

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^3$

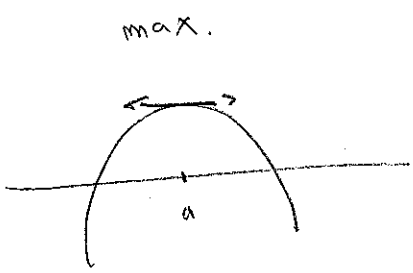
$f'(x) = 3x^2$.

$f'(0) = 0$ mais le pt. 0 n'est ni un max, ni min.

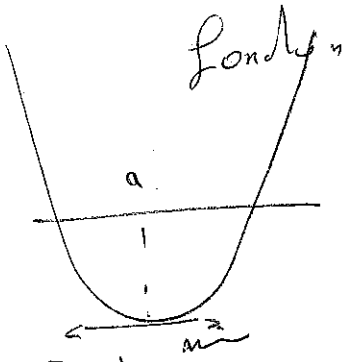


Rq : (Interprétation Géométrique)

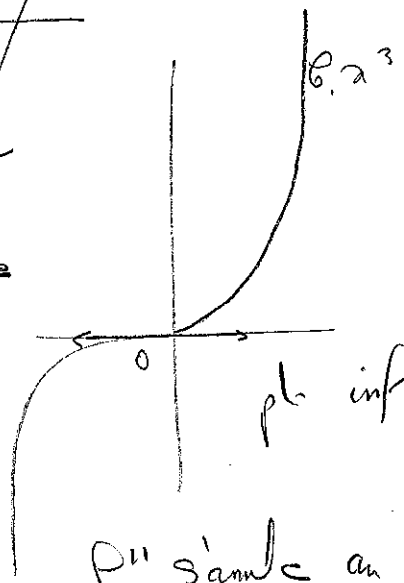
si $f'(a) = 0$ alors tangente horizontale.



f : fonction ~~convexe~~ concave



fonction ~~convexe~~ convexe



pt inflexion

f'' s'annule en 0 et change de signe

	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

Déf :

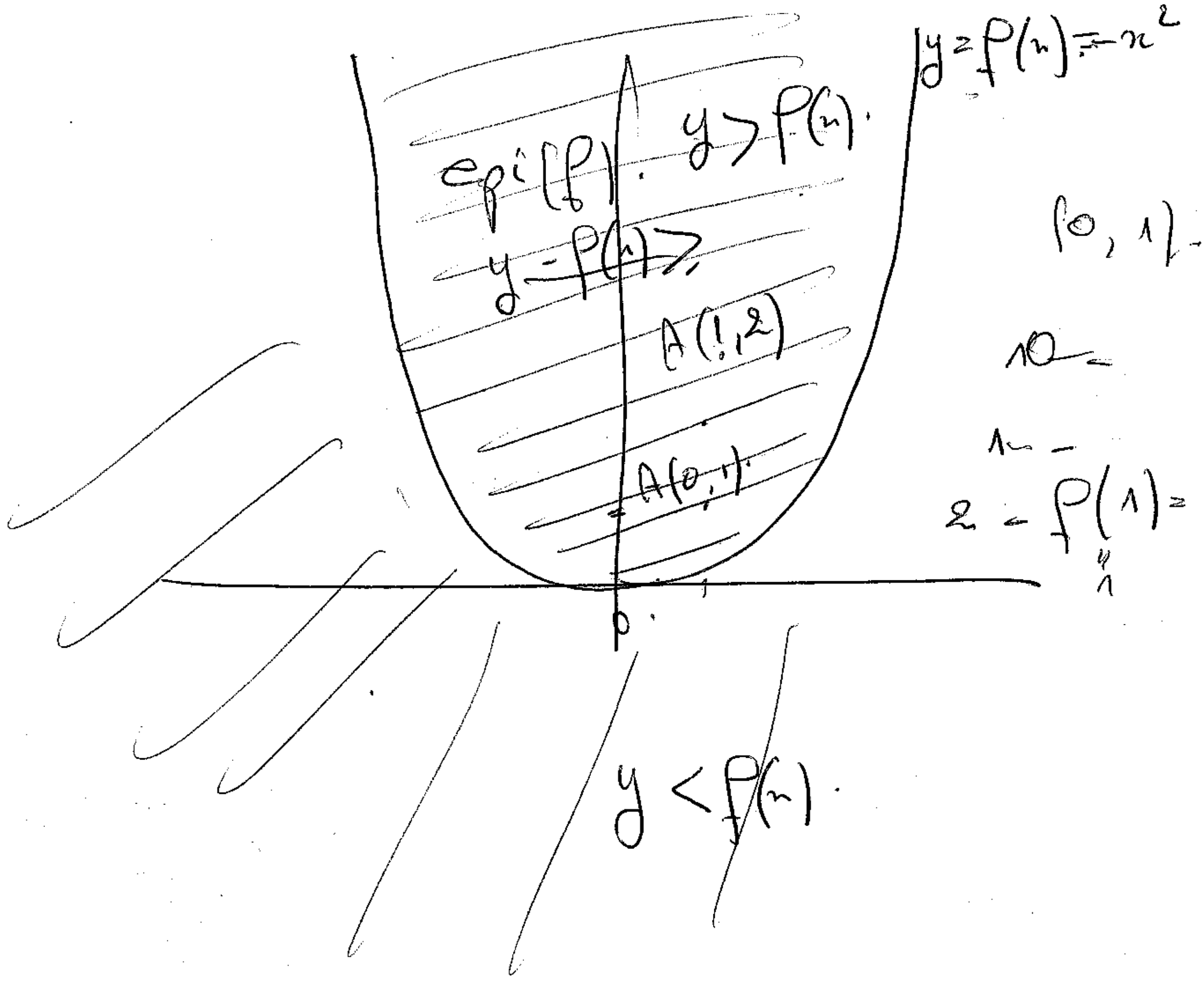
si f est dérivable en a et $f'(a) = 0$ tq $a \in D_f$.

a s'appelle point critique

Exemple :

~~$f(x) =$~~ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2.$



$A(1,2)$. : $x = 1$; $f(1) = 1^2 = 1$.
$y = 2$.

$y - f(x) = 2 - 1 \geq 0$

Proposition : f. Epi d'une fonction convexe
soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

f est convexe sur $I \Longleftrightarrow Epi(f)$ est convexe.

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 - 6x + 4y + 5 < 0$
et $\quad -2 < x+y \leq 2 \}$

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \; 0 \leq |2x-2| < 1 \}$.

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; 0 \leq |2x-2| \}$ et . .

$= \mathbb{R}^2 \cap C_2 = C_2$.

Remarque: (justification par absurde d'un domaine non ~~justifiée~~ borné).

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x+2)^2 + y^2 > 4$
et $x - y \leq -1 \}$.

~~Soit $M_t(0,t)$ avec~~ $t \geq$

Soit $M_t(0,t) \in C$ avec $t \geq 1$.

(en effet $(0+2)^2 + t^2 > 4$
et $0 - t \leq -1 \quad \forall t \geq 1$).

Proposition (intersection d'ensemble convexe).
~~soit A_1 un convexe~~ * n un nombre ~~fixé~~ fini
soit $C_1, C_2, C_3, \dots C_n$ n ensemble convexe
$C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \dots \cap C_n$ sera un ensemble
convexe.

Remarque:

~~Epigraphe~~

~~Soit f~~

soit f

* C un ensemble convexe $\forall (A, B)$
$[AB] \in C$.

* f une fonction convexe $\Leftrightarrow$
~~$\forall x \in Df$; $f''(x) > 0$.~~
$\forall x \in I \subset Df$. $f''(x) > 0$.

Définition Epigraphe d'une fonction

Soit ~~f une fonction définie sur $I \subset Df$.~~

~~$epi(f) = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R}$~~

$f : I \subset Df \longrightarrow \mathbb{R}$.
$x \longmapsto y = f(x)$.

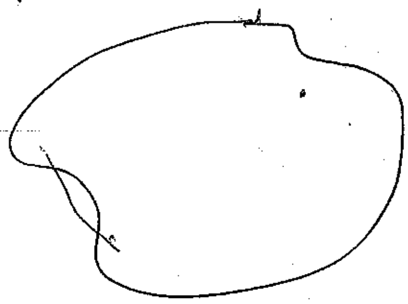
$epi(f) = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} ; \; y \geq f(x)\}$.

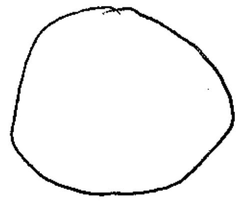
$epi(f) = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} \; ; \; y - f(x) \geq 0\}$.

Un sous ensemble C de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ est dit convexe
si
* $C = \emptyset$ ou
* ou $\forall (A,B)$ de points de C, $[AB] \subset C$.

c-à-d $\forall A \in C, B \in C, \forall t \in [0,1]$

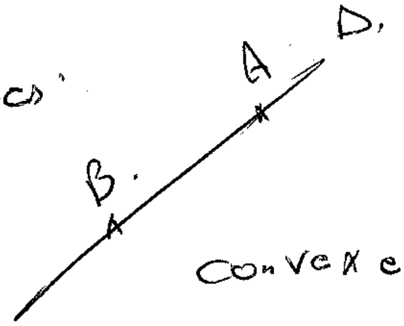
$$(1-t)A + Bt \in C.$$





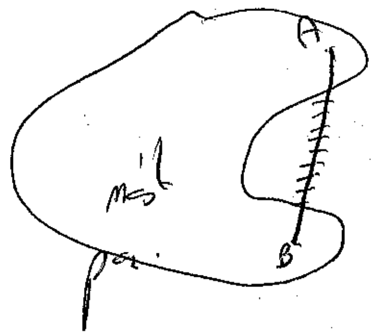
Exemples:

Les droites:



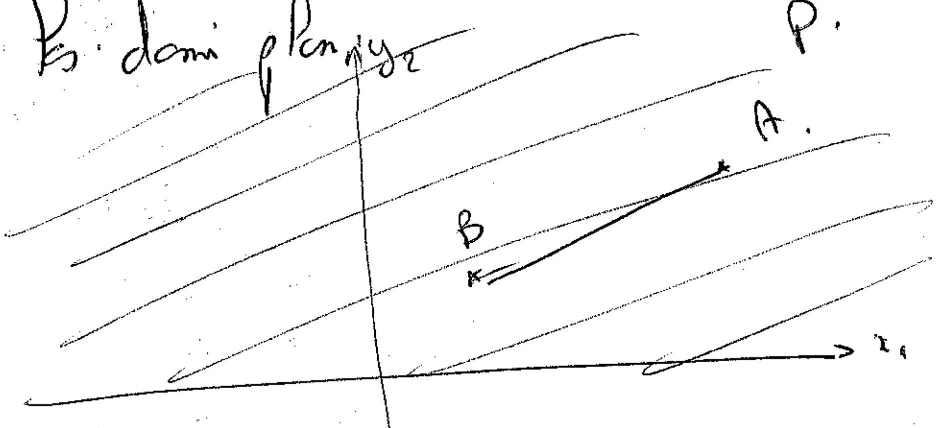
$[AB] \in \Delta$.

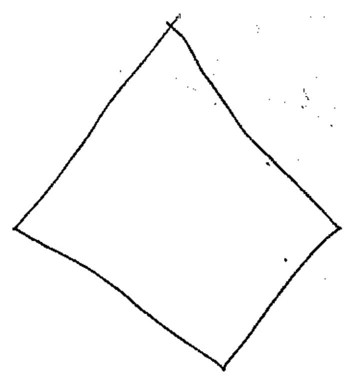
convexe



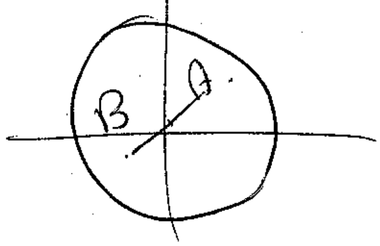
n'est pas

Les demi plans





Les disques, les boules de $\mathbb{R}^2$ (disque)



$B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 2y \}$

③ $C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+3)^2 + y^2 > 4 \}$

et $\{ x - y \leq -1 \}$

$y \geq x - 1$ $\quad$ $y < -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

D :

$N_t(0,t) \in C$ soit $t \geq 1$

~~d(0,~~ $d(0, N_t) = \sqrt{}$

On suppose que C est borée, alors $\exists\, r > 0$

tq $C \subset D(0,r)$.

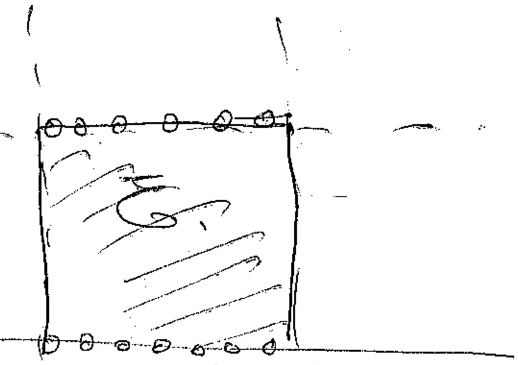
Si on prend on pd $t = 2r$ ~~avec~~

alors $N_{2r} \in C$.

car $N_{2r} \in D(0,r)$

$2r = d(0, N_{2r}) \leq r$

$r \leq 1$.



C n'est pas borée

donc $\exists m_1 = 1$ ni quvat $m_2 = 2$ $\quad |x| \leq m_1 = 1$ $\quad |y| \leq m_2 = 2$.

$-1 \leq x \leq 1$ $\quad$ donc C est borée

$-2 \leq 0 < y \leq 2 \leq 2$

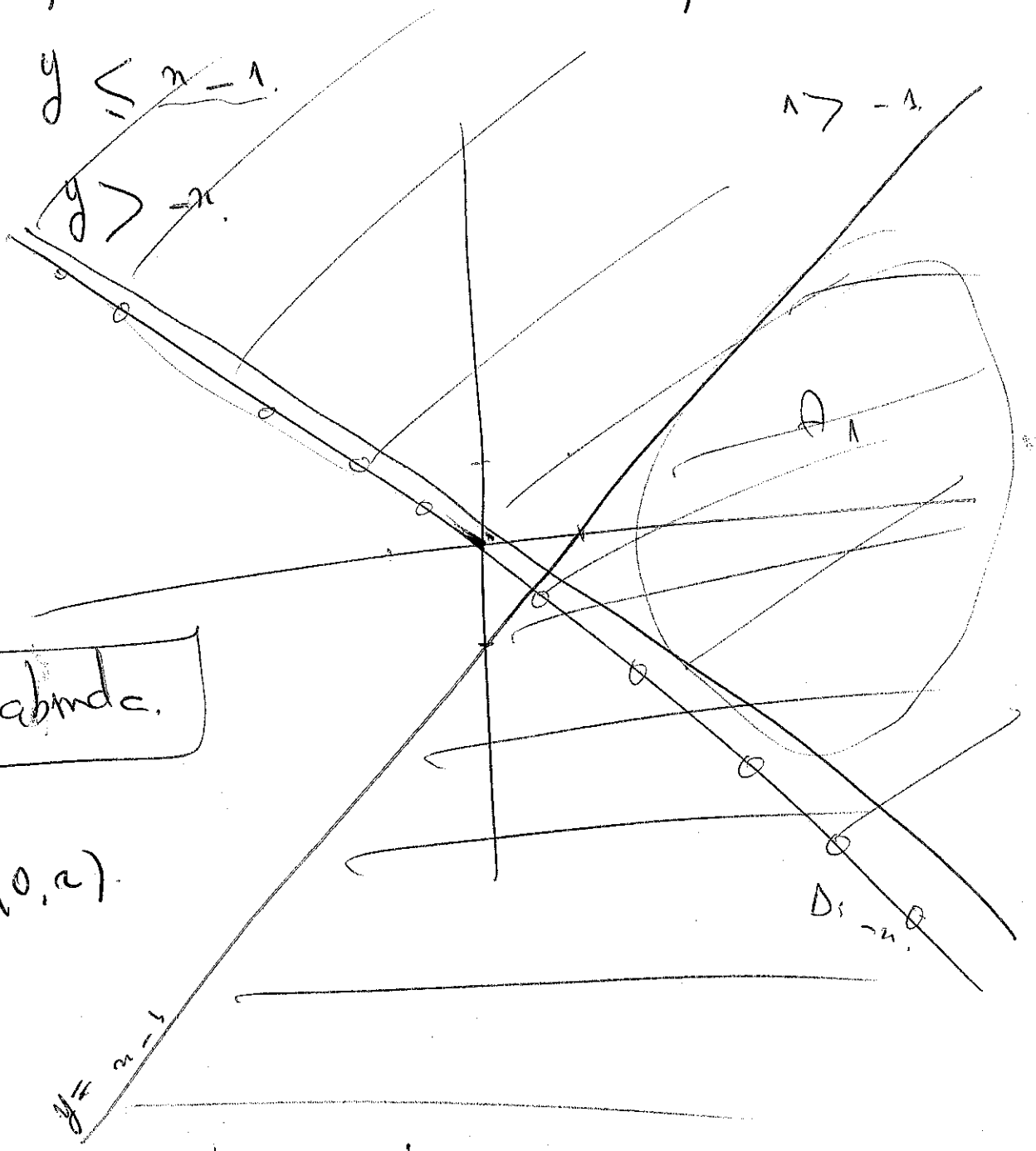
$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x+y \leq 1\}$.

$y \leq x - 1$.

$y > -x$.

$x > -1$.

$y = -x$



$\boxed{\text{par abmde.}}$

AC $D(0,2)$.

Soit $M\left(\frac{t}{2}, \frac{-t}{4}\right)$.

$0 < 0 = \frac{t}{2} + \frac{t}{4}$.

$\frac{t}{}$

$x^2 \to (y-1)^2$

$x = -1$.

$y = -1$.

$y \quad -1 \quad 1$.

abmde.

$d(O, N_t) = \sqrt{(t-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{t^2} = |t|$
$= t.$

On suppose que $\mathcal{C}$ est bornée alors $\exists\ r > 0$

tq $\mathcal{C} \subset D(0, r)$

Si on prend ~~r =~~ $t = 2r$ alors

$N_{2r} \subset \mathcal{C}.$

$2r = t = d(O, N_{2r}) = \sout{t = 2r} \leq r$

~~$r \leq$~~

② développement limité de f à l'ordre 1 au pt 2

$$f(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + (x-2)\varepsilon(x-2)$$

avec $\varepsilon(0) = 0$.

Or $f(2) = \dfrac{1}{\sqrt{4+4+2}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

et $f'(2) = \dfrac{-3}{\sqrt[3]{10}}$

donc

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{20}} - \frac{3}{\sqrt[3]{10}} \cdot (x-2) + (x-2)\,\varepsilon(x-2).$$

Position de Problème :

~~$f : \mathbb{R} \longrightarrow$~~

~~$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.~~

$f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$.

$f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$(x, y) \longmapsto f(x, y)$.

Déterminer domaine défini.

* continuité
* dérivable ; ∇f
* Td
* D L d'une fonction à deux variables :
  Convexité d'une fonction à 2 variables
* les Extrema (Td) (~~max~~ min) : optimisation d'une fonction à deux variables sous contrainte de l'abo

$f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x)$.

* Domaine Défini.
* continuité
* dérivable ; $f'(x)$.
* Tableau de Variation
* D.L d'une fonction à une seule variable
  f convexe à une seule
* les Extremas (tableau de variation) (min ~~et max~~) ; optimisation d'une fonction à une seule variable

$$G_f = \{ \cancel{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \mid x \in D_f, \text{ et } y = f(x) \}$$

$$\cancel{(x,y)}$$

Courbe de niveau :

* $\forall k \in \mathbb{R}$, on appelle courbe de niveau k de la fonction f, l'ensemble C_k des pts $M(x,y)$

$$C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x,y) \in D_f \text{ et } f(x,y) = k\}$$

Remarque :

Les courbes de niveau ~~sont~~ est l'intersection ~~d'un~~ du graphe d'une fonction à deux variables et le plan d'équation $z = k$.

$$(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

on pose $h = y - y_0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, h + y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Notation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) = p$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = q$$

Définition (gradient de f).

Si f est dans dérivée partielle existent au pt $M_0(x_0, y_0)$

On appelle gradient de f au pt M_0. Le vecteur de $\mathbb{R}^2$

$$\text{grad } f(M_0) = \text{grad } f(x_0, y_0) = \nabla f(M_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Dans tout le plan de cours :

Hyp : $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$. et U un ouvert.
$(x,y) \longmapsto f(x,y)$ tq $U \subset \mathcal{D}_f$.

① Fonctions partielles (Déf).

Soit $A(a,b) \in \mathcal{D}_f$. ; $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

Les fonctions partielles de f sont :

$f_A^1(x) = f(x,b)$ càd la variable en y est fixe.

$f_A^2(y) = f(a,y)$. càd " " " x est fixé

② Dérivés partielles premières en un point :

Si $M_0 = (x_0, y_0) \in U$. , sous les hypothèses (Hyp).

Alors les dérivés partielles première de f au pt M_0 sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \underset{x \to x_0}{=} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}.$$

Si on note $h = x - x_0$. ; $x \longrightarrow x_0$
$\Leftrightarrow h \longrightarrow 0$.

par $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \underset{h \to 0}{\lim} \frac{f(h + x_0, y_0) - f(x_0,y_0)}{h}.$$

① Fonction à deux variables

On appelle fonction de deux variables, toute application sur une partie D_f de $\mathbb{R}^2$.

soit
$$f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}.$$
$$(x, y) \longmapsto f(x, y).$$

② Graphe d'une fonction de deux variables

soit f une fonction définie sur $D_f \subset \mathbb{R}^2$

On appelle graphe de f :

$$G_f = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x, y) \in D_f \text{ et } z = f(x, y) \}$$

③ Fonction affine (Définie

On appelle fonction affine
$$f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}.$$
$$(x, y) \longmapsto f(x, y) = ax + by + c$$
$a, b, c \in \mathbb{R}$

Si $c = 0$ application linéaire.

$\underbrace{2x - y}$ $\neq 0$

D_1 : $\boxed{y = 2x}$

$\mathbb{R} \setminus D_1$ avec $D_1 : y = 2x$

TD 17	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi
10h15-11h45		Droit Public	option	[redacted]
		A8 Edgar Faure	option	[redacted]
12h00-13h30	option	[redacted]	[redacted]	option
	option	[redacted]	[redacted]	option
13h45-15h15	Soutien Maths	[redacted]	Maths	
	A5 Henri Tézenas	[redacted]	B102	
15h30-17h00	option	[redacted]	option	Outils Maths
	option	[redacted]	option	B102 Bis
17h15-18h45	Maths	[redacted]	option	[redacted]
	B102	[redacted]	option	[redacted]
19h00-20h30	[redacted]			[redacted]
	[redacted]			[redacted]

$xy = k.$ $\quad k.$ $\quad \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

$y = \frac{k}{x}$ $\quad k < 0.$

si $k < 0.$

si $k < 0$ $\quad xy = k$ $\quad C_k = \Phi.$

$C_k = \Phi$

$x^2 y^2 \neq 8.$

si $k > 0$ $\quad xy = k \Rightarrow$

$|xy| \neq 2\sqrt{2}.$

$C_k = \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in D_f = \mathbb{R}^2 \\ xy = k \end{array} \right.$ $\quad k = \frac{y}{x}.$

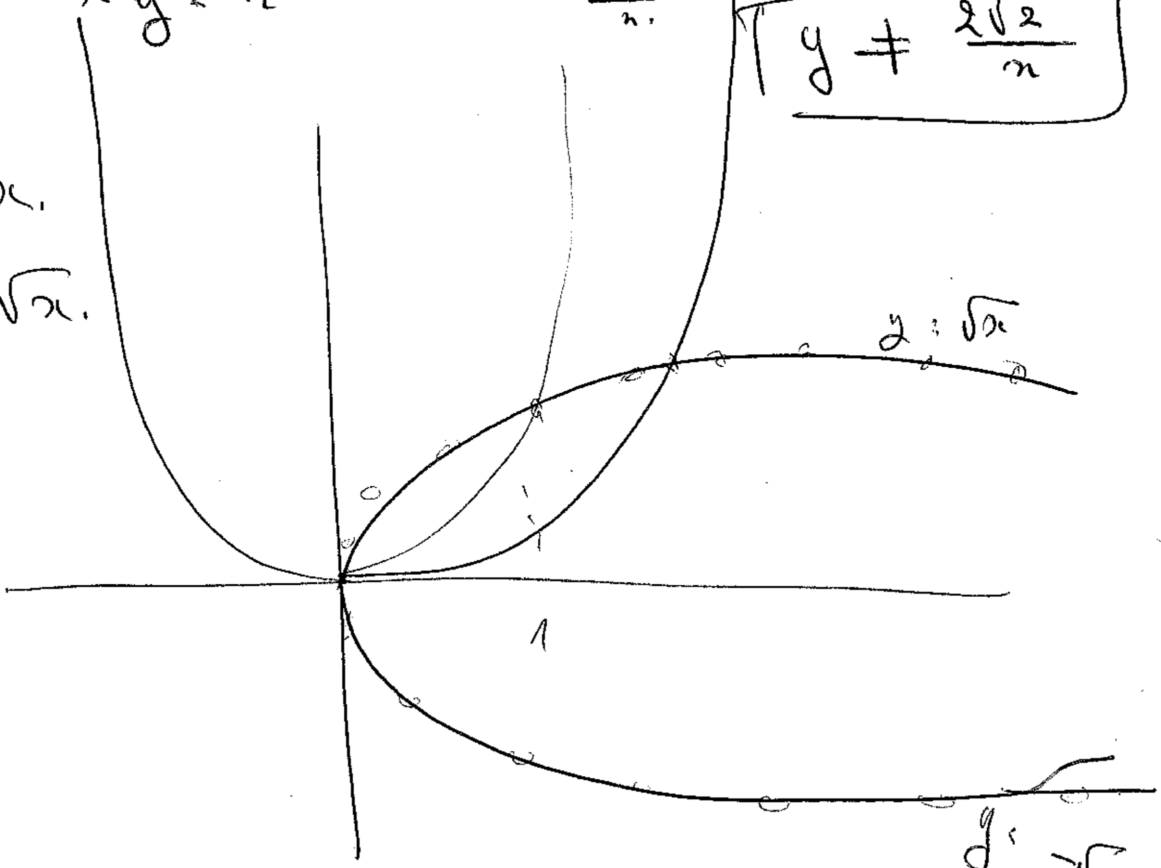
$xy \neq 2\sqrt{2}.$

$y \neq \frac{2\sqrt{2}}{x}$

$y^2 \neq x.$

$y = \pm\sqrt{x}.$

$y = x^2$



n.G

$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x}. \end{cases}$

$x^2 = \sqrt{x}.$

$x^4 - x = 0$

$x^3(x - 1) = 0$

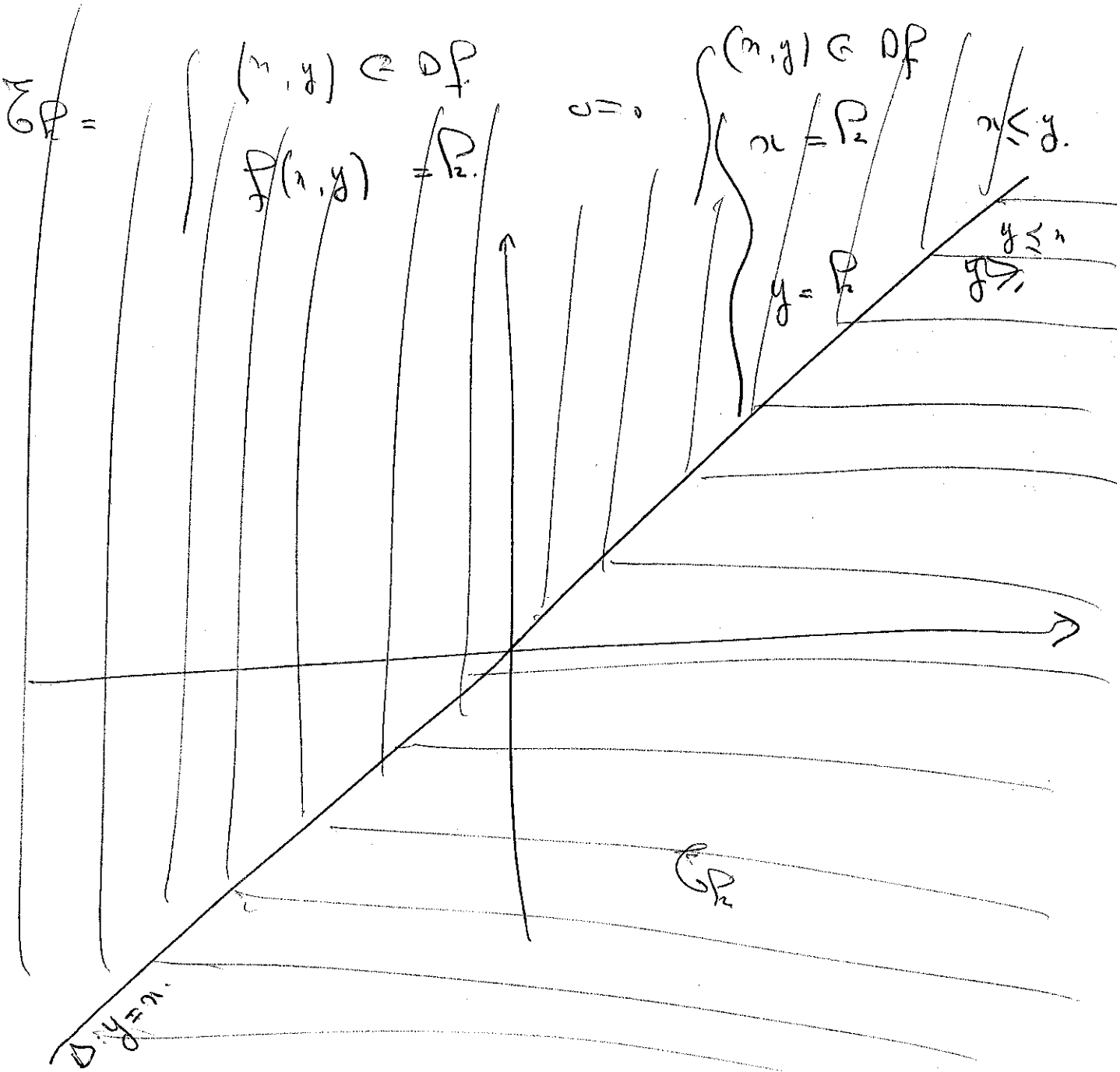
$x = 0$ ou $x = 1$

$f(x,y) = \min(x,y)$; $k \in \mathbb{R}$.

$$f(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq y. \\ y & \text{si } x \geq y. \end{cases}$$

$D_f(x,y) = \mathbb{R}^2$

$$\mathcal{C}_k = \begin{cases} (x,y) \in D_f \\ f(x,y) = k. \end{cases} \iff \begin{cases} (x,y) \in D_f \\ x = k \\ y = k \end{cases} \quad x \leq y. \quad y \leq x \quad y \geq x$$



$x \longmapsto \ln(x)$ est de $\mathbb{R}_+^*$

par d'extension

$(x,y) \longmapsto \ln(x)$ cont. sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

$$|x^2+y^2-1| \qquad \begin{array}{l} \text{ou} \\ x^2+y^2 \leq 1 \\ x^2+y^2 > 1. \end{array}$$

Or $|x^2+y^2-1| = \begin{cases} x^2+y^2-1 & \text{si } x^2+y^2>1 \end{cases}$

$f : D_g \longrightarrow$

$\xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{h}$

$f : D_g \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbb{R}$

$(x,y) \longrightarrow g(x,y) = x \longrightarrow h(x)$

$h(g(x,y))$

Chapitre 17

D.L. à l'ordre 1 et différentielle dans $\mathbb{R}^2$.

* Dans toute la suite, on se place sous l'hypothèse

$$(Hyp)\begin{cases} f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad (x,y) \longmapsto f(x,y) \\ U \text{ un ouvert tel que } U \subset D_f. \end{cases}$$

<u>Variation absolue</u>, et ~~di~~ <u>Déf.</u>

Sous les hypothèses (Hyp). Soit $M_0(x_0, y_0) \in U$.

On appelle accroissement ou variation absolue la quantité

$$\Delta f_{M_0}(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

$x_0 \xrightarrow{\text{varie}} x_0 + h$

$y_0 \longrightarrow y_0 + k$.

<u>différentielle</u>:

Sous les hypothèses (Hyp), On considère f de C^1 sur U. $M_0(x_0, y_0) \in U$. ; On appelle différentielle de f en pt M_0

$$df_{M_0} : U \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(h, k) \longmapsto h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)$$

Autrement si $h = x - x_0$.

$$df_{M_0}(x - x_0 ; y - y_0) = (x - x_0)\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}.$$

Si on note $\vec{v} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$.

Alors

$$\boxed{df_{M_0}(h,k) = \cancel{\vec{\nabla} f_{M_0}(h,k)} ; \langle \vec{\nabla} f_{M_0}, \vec{v} \rangle}$$

<u>Développement limité à l'ordre 1</u>

<u>Thé</u> Sous les hyp., f fonction de C^1 sur U.

$M_0(x_0, y_0) \in U$, Alors $\exists$ une fonction ε continue au voisinage $D((0,0))$ tq $\varepsilon(0,0) = 0$.

et $\forall (h,k) \in D((0,0))$.

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = \cancel{f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}}$$

$$= f(x_0, y_0) + df_{M_0}(h,k) + \|(h,k)\| \, \varepsilon(h,k)$$

$$= f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) + \sqrt{k^2 + h^2}\, \varepsilon(h,k)$$

La quantité $f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)$ c'est l'approximation affine on note $\hat{f}_{M_0}$

Fonctions convexe ou concave à deux variables

Déf pour les fonctions de C^1 :

Soit f une f^{nt} de C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.

C un sous ensemble $\subset U$.

On note $P_f(C) = \{(x,y) \in C \text{ tq } f(x,y) = z\}$

- f est convexe sur C. si $P_f(C)$ est situé au dessus de tous ses plans tangents. c.a.d.

$\forall (x,y) \in C$; $\forall (x_0,y_0) \in C$.

$$f(x,y) \geq \left(\hat{f}_{(M_0)} = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)\right)$$

* f est concave sur C si $P_f(C)$ est situé au dessous de tous ses plans tangents c.a.d

$\forall (x,y) \in C$; $\forall (x_0,y_0)$.

$$f(x,y) \leq \hat{f}_{M_0} = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)$$

Rq :

Toute fonction affine est à la fois convexe et concave sur $\mathbb{R}^2$

<u>Théorème pour les fonctions de C^2.</u>

Soit f une fonction de C^2 sur un ouvert U.

C un ensemble convexe $\subset U$.

Notons $D^2 f(x,y) = \text{Hess } f = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$

Alors * Si $\forall (x,y) \in C$; et $rt - s^2 \geq 0$

et ($r \geq 0$ et $t \geq 0$) $\Rightarrow$ f convexe

* Si $\forall (x,y) \in C$ $rt - s^2 \geq 0$

et ($r \leq 0$) et ($t \leq 0$) $\Rightarrow$ f concave

* Si $\forall \exists (x,y) \in C$ tq $rt - s^2 < 0$

au (x,y) alors f n'est pas ni convexe, ni concave.

Combinaison linéaire à coefficients ⊕.

* Si f et g sont convexes (resp concave) sur $C \subset \mathbb{R}^2$ et si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ alors

$\alpha f + \beta g$ est convexe sur C.

<u>Lemme d'extension :</u>

Si $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe (resp concave)

* La fonction $\cancel{g : (x,y)}$

$$g : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x)$$ est convexe (resp convexe)

* La fonction $h : \mathbb{R} \times I \longrightarrow \mathbb{R}$.
$$(x,y) \longmapsto f(y)$$ est convexe sur $\mathbb{R} \times I$.

<u>Composition :</u>

Fonction affine composée par une fonction

Proposition

Soit h une fonction affine sur $\mathbb{R}^2$ et f une fonction sur I.

Alors $f \circ h$ est convexe $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / h(x,y) \in I\} \subset \mathbb{R}^2$

Proposition (21) (composition par une fct croissante

soit g une fonction convexe sur C de $\mathbb{R}^2$.

$f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante, convexe

sur I. Alors $f \circ g$ est convexe

$$\Delta f_{M_0}(h_1, h_2) = f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0)$$

$=$

$$\Delta f_{(0,1)}(h_1, h_2) = f(h_1, 1 + h_2) - f(0,1)$$

$$= \frac{h_1}{e^{1+h_2}} - e^0$$

$x = x_0 \quad h_1$

$0{,}1 = 0 + 0{,}1$

df

$$\Delta f_{M_0}(h, h) = df_{M_0}(h, h)$$

$x \quad x_0 \quad h_1$

$0{,}1 = 0 + 0{,}1$

$y \quad y_0 \quad h_2$

$0{,}8 = 1 - 0{,}2$

$df_{(0,1)}$

$$df_{M_0}(h_1, h_2) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0, y_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y_0}(x_0, y_0)$$

$= (x - x_0)$

D.L. à l'ordre 2.

1 Théorème (Formule de Taylor-Young à l'ordre 2).

Soit $f : U \subset \mathcal{D}f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$(x, y) \longmapsto f(x, y).$$

et $M_0 = (x_0, y_0) \in U$. Alors il existe une fonction sur un Disque de centre $(0,0)$ tq $\varepsilon(0,0) = 0$ et $\forall (h, k) \in \mathcal{D}((0,0))$

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0, y_0) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x_0, y_0) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)$$

$$+ h^2 + k^2 \, \varepsilon(h, k)$$

D.L à l'ordre 2 au pt $M_0(x_0, y_0)$.

<u>Rq 1</u> $h = x - x_0$.
$k = y - y_0$.

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) + \overset{(y-y_0)}{k} \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)$$

$$+ \frac{1}{2}\left((x - x_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(M_0) + (y - y_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y}(M_0) + 2(y - y_0)(x - x_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0)\right).$$

$$+ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \, \varepsilon((x - x_0), (y - y_0))$$

Rq ②

$$h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = df_{M_0}(h, k) = \left\langle \vec{\nabla} f(M_0) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle$$

~~Par analogie~~

Par convention, notons la forme quadratique de f.

$$d^2 f_{M_0}(h, k) = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0, y_0) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(M_0) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Par suite :

La nouvelle écriture du D.L à l'ordre 2 est :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = \underset{f(x_0)}{f(x_0, y_0)} + df_{M_0}(h, k) + \frac{1}{2} d^2 f_{M_0}(h, k) + (h^2 + k^2)\, \varepsilon(h, k)$$

pour faire le point, nous établi une formule qui ressemble à un D.L à l'ordre 2 pour fonction scalaire variable

③. Par définition (en utilisant la notation de Monge)

$$d^2 f_{M_0}(h, k) = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$= h^2 r + k^2 t + 2hk\, s.$$

· Proposition :

si $rt - s^2 > 0$ et ($r > 0$ et $t > 0$) alors au voisinage de point M_0. $\mathcal{C}_f / \pi_0$.

si $rt - s^2 \not> 0$ $\pi_0 / \mathcal{C}_f$.
($r < 0$ et $t < 0$).

si $rt - s^2 < 0$ la surface représentative de f traverse le plan π_0.

④ Position du plan tangent par rapport la surface
~~dite~~ (déch.) courbe de f.

Nous rappelons l'équation du plan Π_0 tg en :

$P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est d'

$$z = \hat{f}_{M_0} = f(x_0, y_0) + df_{M_0}(h, k)$$

avec $h = x - x_0$
$k = y - y_0$

~~$= f(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)$~~

$$= f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(M_0).$$

D.L à l'ordre 2 de f.

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + df_{M_0}(h, k) + \frac{1}{2} d^2 f_{M_0}(h, k)$$
$$+ h^2 + k^2 \, \varepsilon(h, k).$$

Pour connaître
la position du courbe de f par rapport le plan.
on fait la différence.

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - z = \frac{1}{2} d^2 f_{M_0}(h, k) + h^2 + k^2 \varepsilon(h, k)$$

$$= \frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2).$$

② Détermination de la Hessienne:

Soit f de C^2 tq $f : U \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
$(x,y) \longmapsto f(x,y)$.

On appelle det de la matrice hessienne.

$$\det \text{Hess.} = \begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} = rt - s \times s = rt - s^2$$

③ Signe de la forme quadratique à la matrice Hessienne:

Soit ~~r s t~~ la matrice $\text{Hess.} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ et.
$d^2f_{M_0}$ la forme quadratique associée $= rh^2 + 2sh\,k + tk^2$

* Si $rt - s^2 > 0$ et.

* $\begin{cases} \text{Si } r > 0 \text{ ou } t > 0 & \text{alors } rt\, d^2f_{M_0} > 0 \\ \text{Si } r < 0 \text{ ou } t < 0 & \text{alors } d^2f_{M_0} < 0 \end{cases}$

Si $rt - r^2 = 0$ la forme quadratique change de signe

Dans tout le chapitre ; notons (H_2) l'hypothèse suivante :

H_2 : {
- Soit $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continue
  $(x, y) \longmapsto f(x, y)$
- U (ouvert $\subset D_f$).
- $g : D_g \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $U \subset D_g$.
- On suppose f et g sont au moins de C^1 sur U.

Position de Problème :

(P1) Déterminer les Extrêmes de f sur un ouvert $U \subset D_f \subset \mathbb{R}^2$
(chapitre 23)

(P2) : Déterminer les Extrêmes de f sur un ouvert U.
Lorsque $\underbrace{g(x, y) = 0}_{\text{contrainte}}$ $\forall (x, y) \in U$.

⟶ Déterminer les Extrêmes de f sur E.
avec $E = \{(x, y) \in U \ / \ g(x, y) = 0\}$
(Rq : n'est pas ouvert).

~~Cas d'~~

① 1ère Méthode : Cas d'une Liaison explicite :

On dit que la Liaison est explicite, si on peut exprimer une des variables en fonction de l'autre :

Exemple :

Soit $f(x,y) = x^2 + y$; la contrainte

D_f $\qquad g(x,y) = x^3 + y = 0$

$D_f = \mathbb{R}^2$.

$D_g = \mathbb{R}^2$.

On prend ~~$U = \mathbb{R}^2$ ouvert~~

$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, g(x,y) = x^3 + y = 0\}$.

$g(x,y) = y + x^3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{y = -x^3}$

$f(x,y) = f(x, -x^3) = \boxed{x^2 - x^3} = \varphi(x)$.

On se ramène à un problème d'extrémum sans contrainte à une seule variable.

idée : _ Etudier la fonction φ.
_ Tableau Variation de φ.
_ à partir T.V on trouve les Extrém de φ.
_ par suite les Extrém de f sous la contrainte.

Exemple 2 :

Soit $f(x,y) = x + 2y$.

$g(x,y) = x^2 + xy + y + y^2 + 2 = 0$

$g(x,y) = y^2 + (x+1)\,y + x^2 + 2 = 0$

$\Delta = (x+1)^2 - 4\,(x^2+2)$.

$$y_1 = \frac{-(x+1) - \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$y_2 = \frac{-(x+1) + \sqrt{\Delta}}{2}$$

La méthode explicite ~~est un peu~~ compliquée pour détermi les Extrem.

② 2ème Méthode : Méthode de Lagrange :

Conditions nécessaire ou conditions du premier ordre :

Théo : (Théorème Extrêma liés).

Soient f et g deux fonctions de C^1 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$.

* Si $(\bar{x}, \bar{y})$ est un extrêmum (local ou global) de f sur U et sous la contrainte $g(x,y) = 0$

alors : ~~l'une des deux~~ il vérifie l'une des deux conditions suivantes

① $g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ et $\nabla g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ (1er cas)

② $g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ et $\nabla g(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$ (1a cas)

et $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq

$$\boxed{\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) - \lambda \nabla g(\bar{x}, \bar{y}) = 0}$$

Equations des tangentes aux courbes de niveau :

* Soit $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.
$(x, y) \longmapsto f(x,y)$

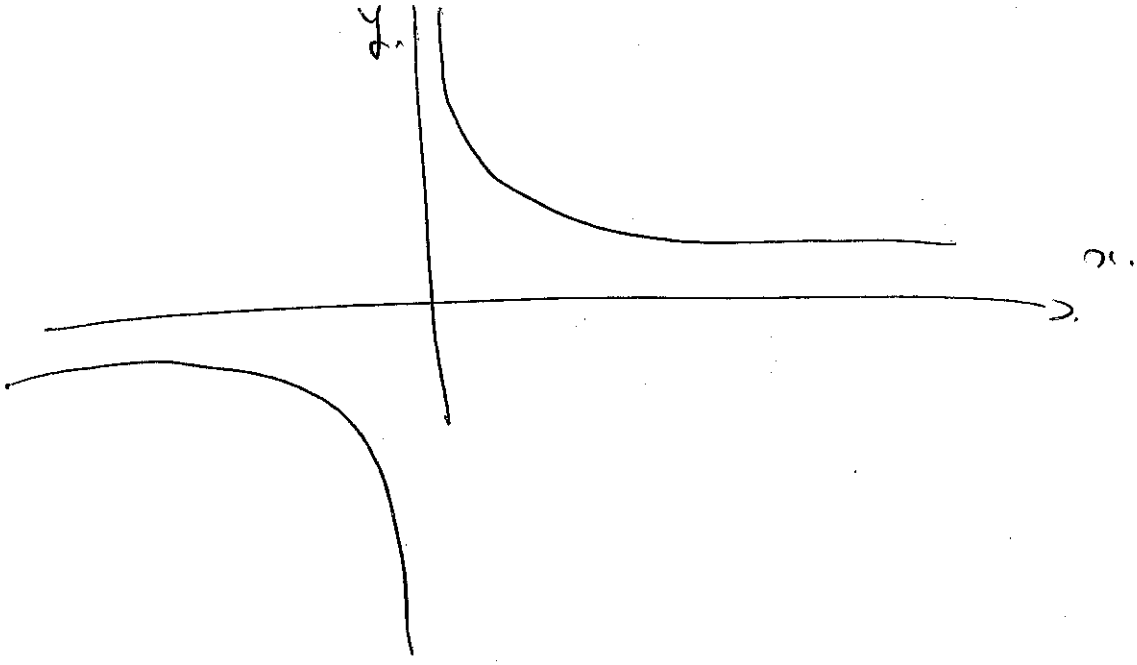
Courbe de niveau de f :

$$C_{P_2} = \begin{cases} (x,y) \in D_f \\ \text{tq } f(x,y) = P_2 \end{cases} \quad \text{avec } P_2 \in \mathbb{R}$$

~~Les de niveaux~~ sont des fonctions en une seule variable c.à.d. ~~C_{P_2} : $\exists g \in \mathbb{R}$ tq~~

Exple : Si $f(x,y) = xy$.

Alors $C_{P_2} = \begin{cases} (x,y) \in D_f \\ y = \dfrac{P_2}{x} \end{cases}$

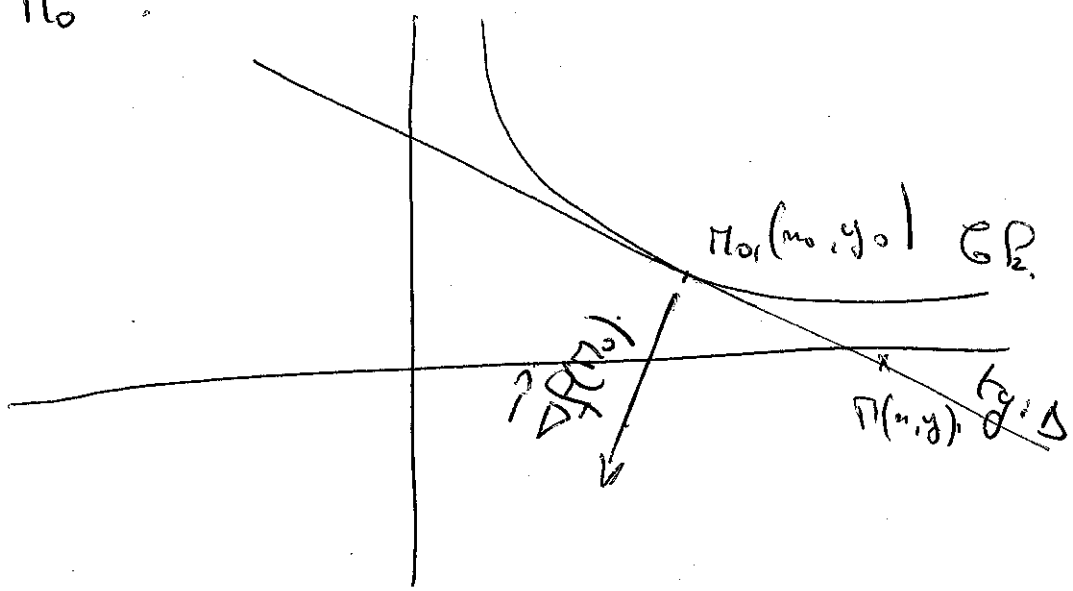


Théo : ~~(admis)~~.

Soit f une fonction de C^1 sur U (ouvert) $\subset D_f$.

tel que $M_0(x_0, y_0) \in U$. Alors

le gradient de f au pt $M_0(x_0, y_0)$ est orthogonal à la tg en M_0 à la courbe de niveau passant par M_0.



Rq :

Soit $M(x,y) \in \Delta$ (tg tangente) :

un $\vec{u}$ le vecteur directeur de la tg sera :

$$\vec{MM_0} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$

et donc $\langle \vec{\nabla} f(M_0) ; \vec{MM_0} \rangle = 0$.

$$\left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \times (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \times (y - y_0) = 0}$$

équation.

<u>Corollaire</u> : (équation de tg).

Soit f une fonction de C^1 sur U.

C_f, la courbe de niveau P_k.

$M_0(x_0, y_0) \in C_k$.

Si $\nabla f(M_0) \neq 0$ alors l'équation de la tangente à la courbe C_k au point M_0 s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0, y_0) \times (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = 0$$

Direction d'accroissement optimal d'une fonction

Proposition : Soit f une fonction de C^1 sur U.

$M_0(x_0, y_0) \in U$. (ouvert).

On note $\vec{v} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ tq $\|\vec{v}\| = r$ avec $r > 0$.

Alors l'accroissement

$$\Delta f_{M_0}(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y)$$

sera le plus grand possible.

si $\vec{v} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \lambda \vec{\nabla} f(M_0) = \lambda \cdot \left(\frac{\partial f}{} \right.$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \end{pmatrix} = \lambda \vec{\nabla} f(M_0)$$

① Définition :

Soit $\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$.

La fonction $\mathcal{L}$ est appellée Lagrangien du Problème (P_2).

Rq. Sous l'ensemble $E = \{(x,y) \in U \mid g(x,y) = 0\}$.

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y).$$

λ multiplicateur de Lagrange

② Définition :

Si $(\bar{x},\bar{y})$ vérifie la 1ère condition du Theorème alors on dit que $(\bar{x},\bar{y})$ est un pt critique du deuxième espèce du (P_2)

Si $(\bar{x},\bar{y})$ vérifie la 2ème condition.

alors on dit que $(\bar{x},\bar{y})$ est un pt critique du première espèce du (P_2)

L1, Gr 5, Algèbre Linéaire **MR BEY**

2012 /2013 **Université Paris Dauphine**

Devoir de Maison 3

Durée : 2 H

Question de cours. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ et soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$, respectivement. Donner la définition de la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Exercice 1. Soit A la matrice 3×4 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -2 \\ -6 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(v) = Av$ pour tout $v \in \mathbb{R}^4$.

a. Déterminer une base de $\ker(f)$.

b. Déterminer le rang de f en utilisant le Théorème du rang.

c. Compléter la base de $\ker(f)$ ci-dessus en une base de $\mathbb{R}^4$.

d. Déterminer des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement, dans lesquelles la matrice de f est la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soit A la matrice 3×3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer $\det(A)$.

b. Déterminer A^{-1}.

Exercice 3. Soit A la matrice 3×3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer les valeurs propres de A.

b. Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

c. Déterminer la matrice $A' = P^{-1}AP$.

$f(x,y) = xy \qquad g(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

1) Extrema de f sur $\mathbb{R}^2$: (pts critiques + nature des pts critiques (Pacd ou gPobD))

$f(x,y) = xy \qquad Df = \mathbb{R}^2$.

$\frac{6x^2-18x}{(2x-3)^2}$

$= \frac{(12x-18)(2x-3)^2 - 2\times 2(2x-3)(6x^2-8)}{(2x-3)^3}$

$= \frac{(12x-18)(2x-3) - 4(6x^2-8)}{(2x-3)^3}$

$g(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad Dg = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$

Soit l'ouvert $U = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \subset Df$

$U = (\mathbb{R}^*)^2 \subset Dg$

Notons $E = \{ (x,y) \in U \text{ tq } g(x,y) - \frac{2}{3} = 0 \}$.

Posons $G(x,y) = g(x,y) - \frac{2}{3}$.

(P_2) : Déterminer les Extrema de f sur E.

avec $E = \{ (x,y) \in U \mid G(x,y) = 0 \}$.

Ex <u>Expliciter la contrainte</u> (1re méthode)

~~$g(x,y)$~~ $G(x,y) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{3} = 0$

$\frac{1}{x} = \frac{2}{3} - \frac{1}{y} \iff \frac{1}{x} = \frac{}{3y}$

$\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{3}. \iff \frac{2x-3}{3x} = \frac{1}{y}.$

$y = \frac{3x}{2x-3} \qquad \forall x \neq \frac{3}{2}.$

$\begin{cases} x^{-1} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3} \\ (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{3x}{2x-3} \\ x \neq \frac{3}{2} \text{ et } x \neq 0. \end{cases}$

Posons ~~f(x,y f(x,y) =~~ pour $y = \frac{3x}{2x-3}$.

$f(x,y) = f\left(x, \frac{3x}{2x-3}\right) = \frac{3x^2}{2x-3}$

Posons φ (on se ramène à une fonction $\varphi(x)$ d'une seule variable) ~~φ(x,y~~

$\varphi(x) = \frac{3x^2}{2x-3} \qquad \forall x \notin \{0, \frac{3}{2}\}$

$\varphi'(x) = \frac{B}{(2x-3)^2} = \frac{6x(x-3)}{(2x-3)^2}$

$\varphi'(x) = 0 \iff x = 3.$ car.

$6x(2x-3) - 3x^2 \times 2$

$12x^2 - 18x - 6x^2 = 6x^2 - 18x$

$= 6x(x-3)$

$-\infty$		0		$3/2$		3		$+\infty$
	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Equation du plan tangent

$f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de C^1, U ouvert.

$M_0(x_0, y_0) \in U$.

On note $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de $\mathbb{R}^3$ avec $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Alors l'équation du plan tangent en P_0 à la surface équivalente de f est $z = \hat{f}_{M_0}(x, y)$

$$z - f(x_0, y_0) - (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Le plan orthogonal à Π_0 est de vecteur

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$ et passe par P_0.