

Examen de mathématiques (UV13) du 6 février 2006

Les documents et calculatrices sont interdits.

La qualité de rédaction et de la présentation entrera pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié.

Les 3 exercices sont indépendants.

Exercice 1 (6 points) Soit la fonction de deux variables réelles définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = e^{x^4 + y^4 - 2xy}.$$

On sait que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

- 1) Calculer les dérivées partielles de f à l'ordre 1 puis à l'ordre 2 en un point (x, y) arbitraire de $\mathbb{R}^2$.
- 2) Calculer $D^2 f_{(0,0)}$ et en déduire la convexité de la fonction f .
- 3) Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 au point $(0, 1)$.
- 4) Déterminer l'équation du plan tangent au point $(0, 1)$ et sa position au voisinage de ce point par rapport à la courbe représentative de f .
- 5) Calculer, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $e_{f/x}(x, y)$ et $e_{f/y}(x, y)$.
- 6) En déduire une approximation de l'accroissement relatif de f au voisinage de $(1, 2)$ lorsque x croît de 3% et y croît de 2%.

Exercice 2 (8 points) Soit la fonction f définie par

$$f(x, y) = (y - 1) \ln(y - 1) - \ln(x) + x^2 - xy + 2y^2 - 7y - \frac{3}{2}x + 3.$$

- 1) Donner $\mathcal{D}_f$, le domaine de définition de f et faire un dessin de cet ensemble. On précisera bien si les bords appartiennent ou pas à l'ensemble.
- 2) L'ensemble $\mathcal{D}_f$ est-il convexe ?
Nous admettons que $\mathcal{D}_f$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- 3) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_f$.
- 4) Montrer que la fonction $\phi : u \mapsto u \ln u$ est convexe sur son ensemble de définition.
- 5) En déduire la convexité de f sur $\mathcal{D}_f$.
- 6) Montrer que $(2, 2)$ est un point critique.
- 7) En déduire la nature de $f(2, 2)$.
- 8) La fonction f admet-elle un maximum global sur $\mathcal{D}_f$?

Exercice 3 (6 points) Soit les fonctions f et g suivantes :

$$f(x, y) = x^2 + y - \ln(x^2 + y^2 - 7),$$

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 8.$$

On va chercher dans cet exercice, les extrema de la fonction f sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

1) Donner $\mathcal{D}_f$, l'ensemble de définition de f et montrer que

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | g(x, y) = 0\} \subset \mathcal{D}_f.$$

Tracer les deux ensembles sur le même dessin.

Nous admettons que $\mathcal{D}_f$ est un ouvert et que les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_f$.

- 2) Montrer qu'il n'y a pas de point critique de deuxième espèce pour ce problème.
- 3) Nous cherchons les points critiques de première espèce pour f sur $\mathcal{D}_f$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$.
 - a) Montrer que si (x, y) est un point critique alors on obtient $\lambda x = 0$, où λ est le multiplicateur de Lagrange associé.
 - b) En déduire alors les 4 points critiques de première espèce avec leur multiplicateur de Lagrange associé.
- 4) Sous la contrainte $g(x, y) = 0$, f admet-elle un minimum global et un maximum global ?
- 5) Préciser les points pour lesquels ces extrema globaux sous contrainte sont atteints.
- 6) Trouver la nature des autres points critiques.