Université Paris-Dauphine
DUGEAD 1er cycle
Année 2011/2012

Groupe 4
BEY M-A

Contrôle continu n◦ 2 :

La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Tous les documents et calculatrices sont interdits.

Exercice 1 Soit la fonction de deux variables réelles définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = e^{x^4+y^4-2xy}.$$

On sait que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

1) Calculer les dérivées partielles de f à l'ordre 1 puis à l'ordre 2 en un point (x,y) arbitraire de $\mathbb{R}^2$.
2) Calculer $D^2 f_{(0,0)}$ et en déduire la convexité de la fonction f.
3) Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 au point $(0,1)$.
4) Déterminer l'équation du plan tangent au point $(0,1)$ et sa position au voisinage de ce point par rapport à la courbe représentative de f.
5) Calculer, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $e_{f/x}(x,y)$ et $e_{f/y}(x,y)$.
6) En déduire une approximation de l'accroissement relatif de f au voisinage de $(1,2)$ lorsque x croît de 3% et y croît de 2%.

Exercice 2.
On considère la fonction réelle de deux variables f définie par

$$f : (x,y) \mapsto \frac{x^2+y^2}{x+y}.$$

1. Déterminer et représenter son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. On admet qu'il est ouvert. Est-il convexe ? Justifier votre réponse.
2. Déterminer et représenter (sur le même graphique que pour la question précédente) la courbe de niveau $\mathcal{C}_k$ pour $k = -2$ et $k = 1$.
3. Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_f$ et calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.
4. En déduire une valeur approchée de f au point $(0.9, 1.2)$ et déterminer l'équation de la tangente à la courbe de niveau $\mathcal{C}_1$ au point $(1,1)$.
5. Trouver les extrema de f sur $\mathcal{D}_f$.
6. Trouver les extrema de f sur le cercle de centre $(-1,-1)$ et rayon $\sqrt{2}$. *On pourra utiliser la question 2.*
7. Etudier la convexité ou la concavité de f sur les ensembles E_1 et E_2 définis par

$$E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x+y>0\} \quad \text{et} \quad E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x+y<0\}.$$

Exercice 3

Soit f la fonction de deux variables définie par : $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-y}$.

1. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Enoncer le théorème de Schwarz.
3. Calculer les dérivées partielles premières de f et donner son gradient.
4. Calculer les dérivées partielles secondes de f et donner sa matrice hessienne.
5. Trouver les points critiques de f.
6. Déterminer leur nature.
7. Quel est donc le minimum local de f sur $\mathbb{R}^2$? Est-il global ?
8. A partir du déterminant de la matrice hessienne, déterminer si f est localement convexe au voisinage de ses points critiques.
9. Quel est l'intérêt de faire le DL d'une fonction ?
10. Ecrire le $DL_2(\{1,0\})$ de f en précisant soigneusement les hypothèses.
Identifier les parties approximation affine, forme quadratique et reste.
11. Donner l'équation du plan tangent P à la surface S de f, au point $(1,0,1)$.
12. Quelle est la position relative du plan tangent P par rapport à la surface S ?