Université Paris-Dauphine **Groupe 4**
DUGEAD 1er cycle **BEY M-A**
Année 2011/2012

Contrôle continu n◦ 1 :

Exercice 1 Soit la fonction

$$g(x) = \ln(2 - x^2) + \sqrt{2x}$$

(a) Donner le domaine de définition de g et montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle que l'on déterminera.

(b) Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.

(c) Ecrire le développement limité de g à l'ordre 2 au point $x = 1$.

(d) En déduire l'équation de la tangente au point $(1, g(1))$. Préciser la position du graphe de g au voisinage de $x = 1$.

Exercice 2 Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2}{x} e^{-x^2}.$$

1. Calculer l'élasticité de $f(x)$ pour tout $x > 0$.
2. Donner une valeur approchée de la variation relative de f lorsque x augmente de 5% à partir de 1.
3. En partant de $x_0 = 1$, de combien faut-il faire varier x pour que f augmente de 1% (On demande un calcul approché).
4. Calculer l'élasticité de $f^2(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 3 Représenter graphiquement chacun des ensembles suivants dans un repère orthonormé. Pour chacun des 3 ensembles, on tracera sur le graphique sa frontière, et on précisera, sans justification, s'il est ouvert ou fermé. Enfin, on indiquera, en le justifiant, si l'ensemble est borné ou non, convexe ou non.

$$\mathcal{A} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x - 1, \quad y < 1 + x \ \text{ et } \ x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$$

$$\mathcal{B} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid x^2 - 2x \geqslant 2y - y^2\right\}$$

$$\mathcal{C} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2x - 3 \leqslant 0 \ \text{ et } \ |y - 1| < 1\right\}.$$

Exercice 4

On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$.
On note A et B les points de coordonnées respectives $(2\,;3\,;0)$ et $(-1\,;3\,;1)$.
On définit les vecteurs $\vec{u}=(-1\,;0\,;-1)$ et $\vec{v}=(2\,;-1\,;1)$.

1. Donner une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$.

2. Calculer la norme du vecteur $\vec{v}$.

3. Calculer la distance AB.