Université Paris-Dauphine
UFR DEGEAD 1er cycle

Année 2010-2011

Exercices supplémentaires : géométrie de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^3$, on note $A = (-1\,;-2\,;3)$, $B = (5\,;0\,;-1)$ et $C = (4\,;5\,;7)$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, puis celles du vecteur $\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{BC}$.

2. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont-il orthogonaux ?

Exercice 2

On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$.
On note A et B les points de coordonnées respectives $(2\,;3\,;0)$ et $(-1\,;3\,;1)$.
On définit les vecteurs $\vec{u} = (-1\,;0\,;-1)$ et $\vec{v} = (2\,;-1\,;1)$.

1. Donner une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$.

2. Donner une équation du plan $\mathcal{P}'$ passant par B et de vecteur normal $\vec{v}$.

3. Calculer la norme du vecteur $\vec{v}$.

4. Calculer la distance AB.

Exercice 3

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $\vec{a} = (2\,;-2\,;4)$, $\vec{b} = (-6\,;0\,;3)$ et $\vec{c} = (1\,;-7\,;2)$.

1. Montrer que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{c}$ sont orthogonaux à $\vec{b}$.

2. Quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{b} + \vec{c}$?

Exercice 4

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $u = (-1\,;0\,;2)$, $v = (4\,;0\,;1)$.

1. Calculer $\|u\|$ et $\|v\|$, ainsi que le produit scalaire de u par v.

2. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est-elle vérifiée ?

Exercice 5

1. Déterminer les valeurs du réel λ pour lesquelles $u = (2\,;1\,;1-\lambda)$ et $v = (1\,;-1\,;-\lambda+1)$ sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$.

2. Même question pour les vecteurs $u = (0\,;1\,;\lambda)$ et $v = (1\,;0\,;0)$.

3. Même question pour les vecteurs $u = (1\,;2\,;\lambda)$ et $v = (0\,;-2\,;\lambda)$.

Exercice 6

Déterminer les valeurs du réel λ pour lesquelles $\vec{u} = (1\,;2\lambda+2)$ et $\vec{v} = (-4\,;-\lambda+1)$ sont colinéaires dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$; on note $A=(1\,;2)$, $B=(-1\,;0)$ et $C=(1\,;-1)$.

1. Calculer $\det(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{BC})$.

2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont-ils colinéaires ?

3. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

Exercice 8

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Tracer la droite d'équation $y = 2x+1$.

2. Représenter les points $A=(1\,;2)$ et $B=(5\,;0)$ puis donner une équation de la droite passant par ces points.

Exercice 9

On note D l'ensemble $\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2, x+3y-5=0\}$.

1. Montrer que D est une droite dont on donnera un point et un vecteur directeur.

2. Représenter graphiquement la droite D.

Exercice 10

Dans $\mathbb{R}^3$, on note A le point $(1\,;0\,;-2)$ et $\mathcal{P}$ le plan d'équation $z=4$.

1. Donner une équation de la sphère $\mathcal{S}$ de centre A et de rayon 2.

2. Le point I de coordonnées $(1\,;0\,;0)$ appartient-il à $\mathcal{S}$?

3. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AI}$ est orthogonal à $\mathcal{P}$.

Exercice 11

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Donner une équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $(-2\,;-2)$ et dont un vecteur normal est $(-1\,;1)$.

2. Donner une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

3. Montrer que l'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ est réduit à deux points dont on donnera les coordonnées.

Exercice 1

1. On a $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

$\vec{u} = B - A$

$\vec{u} = (5; 0; -1) - (-1; -2; 3)$

De là : $\boxed{\vec{u} = (6; 2; -4)}$

On a successivement :

$\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{BC}$

$\vec{v} = 2(6; 2; -4) - 2(5; 7; 4) + 3(-1; 5; 8)$

car $\overrightarrow{AC} = C - A$ et $\overrightarrow{BC} = C - B$

$\vec{v} = (12; 4; -8) - (10; 14; 8) + (-3; 15; 24)$

$\boxed{\text{Conclusion : } \vec{v} = (-1; 5; 8)}$

2. On a $\overrightarrow{AC} = (5; 7; 4)$

et $\overrightarrow{CB} = (1; -5; -8)$

Ainsi : $\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB} \rangle = 5 \times 1 + 7 \times (-5) + 4 \times (-8)$

$\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB} \rangle = -62$

Le produit scalaire de $\overrightarrow{AC}$ par $\overrightarrow{CB}$ est non nul : $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$ ne sont pas orthogonaux.

Exercice 2

1. On a successivement :

$$\mathcal{P} = \{ M \in \mathbb{R}^3, \quad \langle \overrightarrow{AM}, \vec{u} \rangle = 0 \}$$

$$\mathcal{P} = \{ (x;y;z) \in \mathbb{R}^3, \ (x-2)\times(-1) + (y-3)\times 0 + z\times(-1) = 0 \}$$

car $\overrightarrow{AM} = (x-2\,;\, y-3\,;\, z)$

De là

$$\boxed{\mathcal{P} = \{ (x;y;z) \in \mathbb{R}^3, \ -x - z + 2 = 0 \}}$$

Autre méthode : si $\vec{n} = (a, b, c)$ est un vecteur normal à un plan $\mathcal{P}$, alors ce plan admet une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$, où seul le réel d reste à déterminer. Ainsi, on est assuré que $\mathcal{P}$ a une équation de la forme $-x - z + d = 0$, car $\vec{u} = (-1\,;0\,;-1)$ est normal à $\mathcal{P}$. De plus, $A \in \mathcal{P}$; donc $-2 - 0 + d = 0$, i.e. $d = +2$. D'où la conclusion.

2. On a successivement :

$\mathcal{P}' = \{ M \in \mathbb{R}^3, \ < \overrightarrow{BM}, \vec{v} > = 0 \}$

$\mathcal{P}' = \{ (x;y;z) \in \mathbb{R}^3, \ (x+1) \times 2 + (y-3) \times (-1) + (z-1) \times 1 = 0 \}$

car $\overrightarrow{BM} = (x+1 \,;\, y-3 \,;\, z-1)$

$$\boxed{\mathcal{P}' = \{ (x;y;z) \in \mathbb{R}^3, \ 2x - y + z + 4 = 0 \}}$$

<u>après calculs</u>.

3. On a $\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{4 + 1 + 1}$

$$\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{6}}$$

4. La distance AB est

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

$AB = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 1^2}$

$$\boxed{AB = \sqrt{10}}$$

Exercice 3

1. $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul, or on a

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 2 \times (-6) + (-2) \times 0 + 4 \times 3$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -12 + 12$$

$$\boxed{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0}$$

De la même façon, il vient :

$$\langle \vec{c}, \vec{b} \rangle = 1 \times (-6) + (-7) \times 0 + 2 \times 3$$

$$\langle \vec{c}, \vec{b} \rangle = -6 + 6$$

$$\boxed{\langle \vec{c}, \vec{b} \rangle = 0}$$

Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{c}$ sont donc orthogonaux au vecteur $\vec{b}$.

2. On a $\vec{b} + \vec{c} = (-6; 0; 3) + (1; -7; 2)$

$$\boxed{\vec{b} + \vec{c} = (-5; -7; 5)}.$$

Exercice 4

1. On a, d'une part :

- $\|u\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2}$

$\boxed{\|u\| = \sqrt{5}}$

- $\|v\| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 1^2}$

$\boxed{\|v\| = \sqrt{17}}$

D'autre part :

$<u, v> = (-1) \times 4 + 0 \times 0 + 2 \times 1$

$\boxed{<u, v> = -2}$

2. On remarque

$2 \leq \sqrt{5} \times \sqrt{17}$, car $4 \leq 5 \times 17$

d'où

$| <u, v> | \leq \|u\| \times \|v\|$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est donc vérifiée.

Exercice 5

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a successivement, en notant $u \perp v$ pour « u et v sont orthogonaux » :

$$u \perp v \iff \langle u, v \rangle = 0$$

$$u \perp v \iff 2 \times 1 + 1 \times (-1) + (1 - \lambda) \times (-\lambda + 1) = 0$$

$$u \perp v \iff 2 - 1 + (-\lambda) + 1 + \lambda^2 - \lambda = 0$$

$$u \perp v \iff \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

Le trinôme $\lambda^2 - 2\lambda + 2$ admet un discriminant Δ égal à $\Delta = 4 - 4 \times 2 < 0$, donc il est strictement positif pour tout réel λ.

Par suite : il n'existe aucun réel λ pour lequel u et v sont orthogonaux.

2. Pour tout réel λ, on a

$$\langle u, v \rangle = 0 \times 1 + 1 \times 0 + \lambda \times 0$$

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

Conclusion : toute valeur de λ satisfait la propriété d'orthogonalité de u et v.

3. Soit λ dans $\mathbb{R}$.

Il vient successivement :

$$u \perp v \iff 1 \times 0 + 2 \times (-2) + \lambda^2 = 0$$

$$u \perp v \iff \lambda^2 = 4$$

$$u \perp v \iff \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = -2$$

Les vecteurs u et v sont donc orthogonaux si, et seulement si, λ est dans $\{-2 ; 2\}$.

Exercice 6

Soit λ dans $\mathbb{R}$.

On a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2\lambda+2 & -\lambda+1 \end{vmatrix}$

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \times (-\lambda+1) - (2\lambda+2) \times (-4)$$

$$\underline{\underline{\det(\vec{u}, \vec{v}) = 7\lambda + 9}} \quad \text{après calculs}$$

On sait que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont <u>colinéaires</u> si, et seulement si, $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

De là : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\boxed{\lambda = \frac{-9}{7}}$.

Exercice 7

1. On a $\overrightarrow{AB} = (-2 ; -2)$

et $\overrightarrow{BC} = (2 ; -1)$

Ainsi, $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$

$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (-2)\times(-1) - (-2)\times 2$

$\underline{\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 6}$

2. Le déterminant de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ est non nul : les vecteurs <u>$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont donc pas colinéaires</u>.

3. On a $\overrightarrow{OB} = B = (-1 ; 0)$

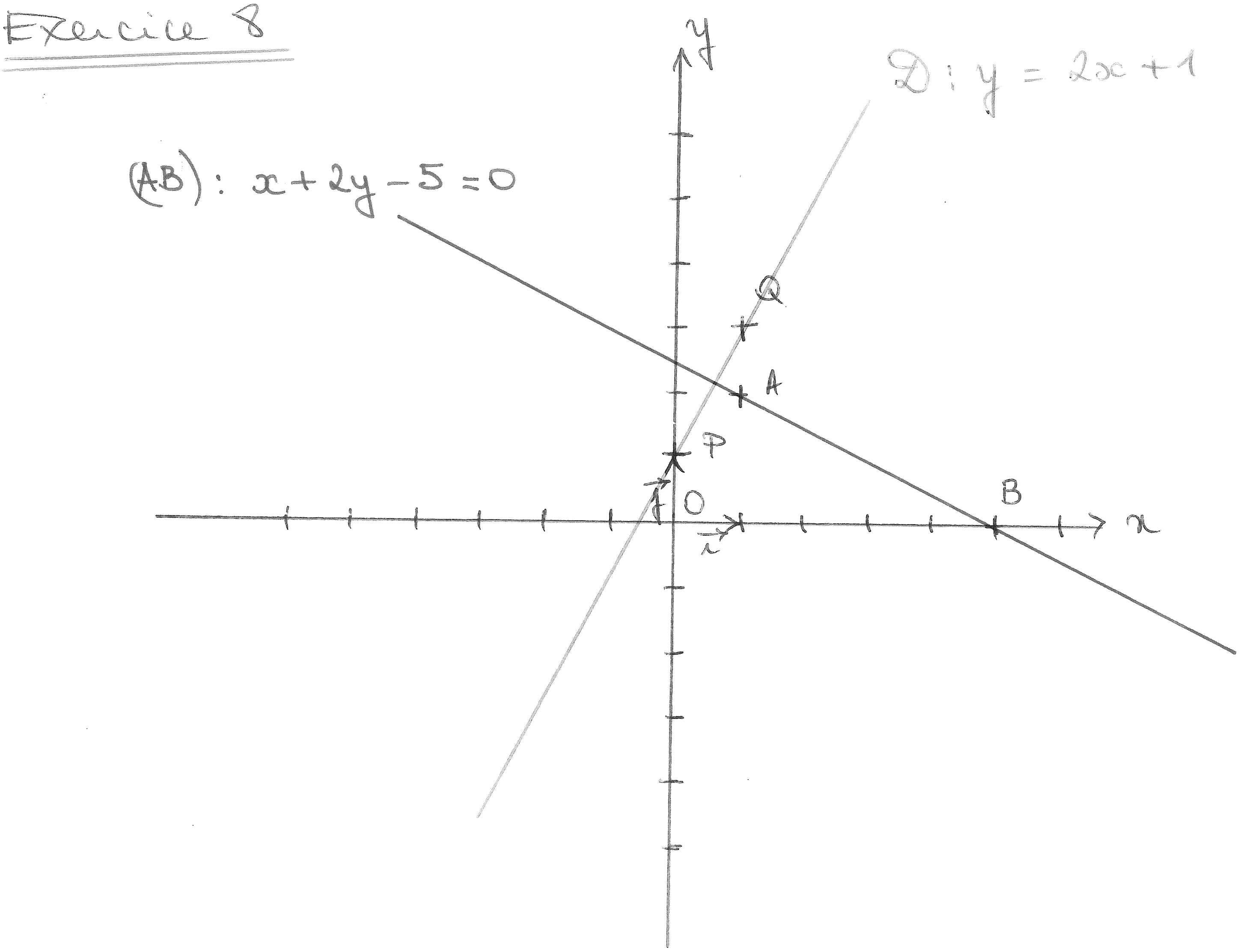
et $\overrightarrow{AC} = C - A = (0 ; -3)$

Ainsi : $<\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AC}> = (-1)\times 0 + 0\times(-3)$

$$\boxed{<\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AC}> = 0}$$

Les vecteurs <u>$\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc orthogonaux</u>.

Exercice 8



1. La droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x + 1$ passe par les points $P = (0;1)$ et $Q = (1;3)$ car $1 = 2 \times 0 + 1$ et $3 = 2 \times 1 + 1$.

2. La droite (AB) est l'ensemble

$$(AB) = \{ M \in \mathbb{R}^2, \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \}$$

$$(AB) = \left\{ (x;y) \in \mathbb{R}^2, \begin{vmatrix} x-1 & 4 \\ y-2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \right\}$$

puisque $\overrightarrow{AM} = M - A = (x-1\,;\, y-2)$

et $\overrightarrow{AB} = B - A = (4\,;\,-2)$

De là, <u>après calculs</u> :

$$(AB) = \{ (x;y) \in \mathbb{R}^2,\ -2x - 4y + 10 = 0 \}$$

$$\boxed{(AB) = \{ (x;y) \in \mathbb{R}^2,\ x + 2y - 5 = 0 \}}$$

Exercice 9

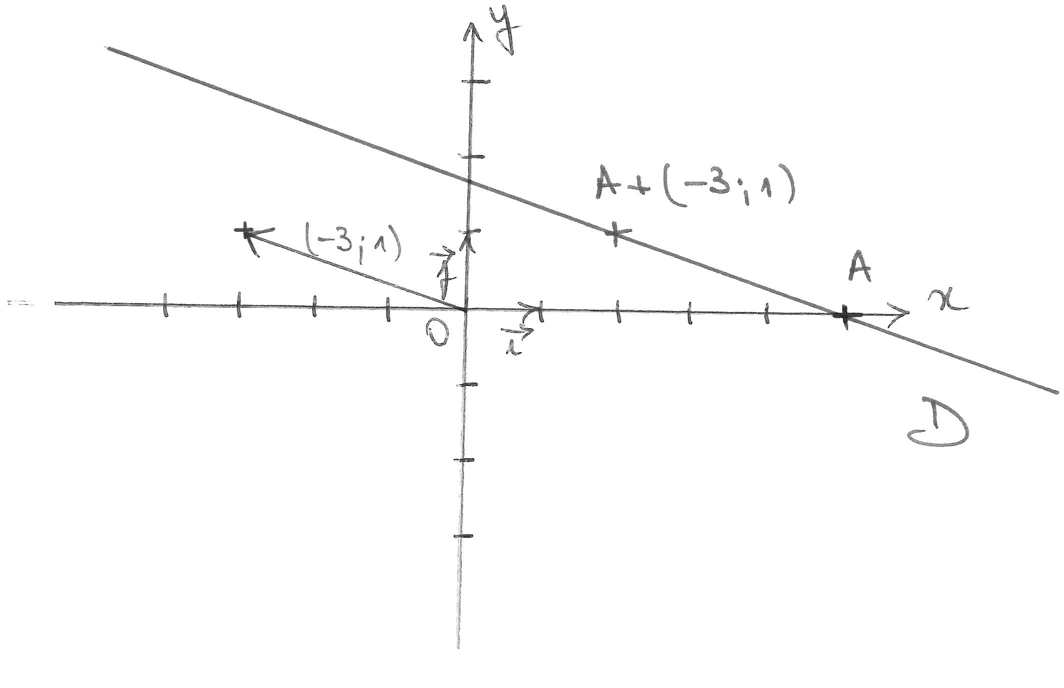
Soit $\mathcal{D} = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2,\ x + 3y - 5 = 0\}$

1. On sait que l'ensemble des points $(x;y)$ du plan vérifiant $ax + by + c = 0$, où a, b et c sont des réels tels que $(a;b) \neq (0;0)$, est une droite de vecteur directeur $(-b;a)$.

Ainsi, $\mathcal{D}$ est une droite de vecteur directeur $(-3;1)$.

De plus, on a $5 + 3 \times 0 - 5 = 0$ donc le point $A = (5;0)$ est un point de $\mathcal{D}$.

2.



Exercice 10

1. On a successivement :

$$\mathcal{S} = \{ M \in \mathbb{R}^3, \quad AM = 2 \}$$

$$\mathcal{S} = \{ M \in \mathbb{R}^3, \quad AM^2 = 4 \}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{ (x;y;z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 4 \}}$$

car $AM^2 = (x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-(-2))^2$

2. Le point I est dans $\mathcal{S}$ puisque

$$(1-1)^2 + 0^2 + (0+2)^2 = 4.$$

3. On a : $\overrightarrow{AI} = I - A$

$\overrightarrow{AI} = (0;0;2)$

De plus, un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n} = (0;0;1)$. Comme $\overrightarrow{AI}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, $\overrightarrow{AI}$ est bien orthogonal au plan $\mathcal{P}$.

Exercice 11

1. On a, successivement :

$$\mathcal{D} = \{ M \in \mathbb{R}^2, \quad \langle \vec{AM}, \vec{n} \rangle = 0 \}$$

où $A = (-2; -2)$ et $\vec{n} = (-1; 1)$

$$\mathcal{D} = \{ (x;y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x+2) \times (-1) + (y+2) \times 1 = 0 \}$$

$$\mathcal{D} = \{ (x;y) \in \mathbb{R}^2, \quad -x + y = 0 \}$$

$$\boxed{\mathcal{D} = \{ (x;y) \in \mathbb{R}^2, \quad y = x \}}$$

2. De même, on a :

$$\mathcal{C} = \{ M \in \mathbb{R}^2, \quad OM = \sqrt{2} \}$$

$$\boxed{\mathcal{C} = \{ (x;y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 = 2 \}}$$

car $OM = \| M \| = \sqrt{x^2 + y^2}$

3. Soit $(x;y)$ dans $\mathbb{R}^2$. On a :

$$(x;y) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \iff \begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

$$(x;y) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \iff \begin{cases} y = x \\ 2x^2 = 2 \end{cases}$$

$$(x;y) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \iff \begin{cases} y = x \\ x = 1 \text{ ou } x = -1 \end{cases}$$

$$(x;y) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \iff (x;y) \in \{(1;1), (-1;-1)\}$$

De là

$$\boxed{\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \{(1;1), (-1;-1)\}}$$