
Contrôle continu n° 1 : 25 novembre 2008

Les documents et calculatrices sont interdits. La qualité de rédaction et de la présentation entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Ne pas oublier pas de marquer le numéro de votre groupe.

Exercice 1 Soit la fonction

$$f(x, y) = \ln(2 - x^2 - y^2) + \sqrt{2x + 3y}.$$

1. (a) Donner et tracer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f .
(b) L'ensemble $\mathcal{D}_f$ est-il convexe, borné? On demande de justifier les réponses.
(c) Soit k un réel, donner la définition de la courbe de niveau k associée à f .
2. Soit maintenant la fonction suivante

$$g(x) = f(x, 0).$$

- (a) Calculer $g(x)$. Donner le domaine de définition de g et montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle que l'on déterminera.
- (b) Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.
- (c) Ecrire le développement limité de g à l'ordre 2 au point $x = 1$.
- (d) En déduire l'équation de la tangente au point $(1, g(1))$. Préciser la position du graphe de g au voisinage de $x = 1$.

Exercice 2 Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2}{x} e^{-x^2}.$$

1. Calculer l'élasticité de $f(x)$ pour tout $x > 0$.
2. Donner une valeur approchée de la variation relative de f lorsque x augmente de 5% à partir de 1.
3. En partant de $x_0 = 1$, de combien faut-il faire varier x pour que f augmente de 1% (On demande un calcul approché).
4. Calculer l'élasticité de $f^2(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 3 1. Donner l'équation cartésienne du plan passant par $A = (1, 2, 3)$ et orthogonal au vecteur $v = (1, 1, 0)$.

2. Soit l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |2x + 1| < y - 1\}.$$

- (a) Représenter graphiquement $\mathcal{A}$.
- (b) Sans justification, expliciter sur le graphique la frontière de $\mathcal{A}$.
- (c) L'ensemble $\mathcal{A}$ est-il borné? convexe? On demande de justifier les réponses.