Corrigé Devoir Maison

Exercice 1.

1. Comme la fonction exponentielle est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, la fonction f est elle-aussi définie et de classe C^∞, donc C^2, sur $\mathbb{R}$, en tant que combinaison linéaire de fonctions de classe C^∞.
De même, la fonction logarithme est définie et de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$. Pour x dans $]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto x+1$ est une fonction affine donc C^∞ sur $]0,+\infty[$ qui prend ses valeurs dans $]0,+\infty[$. On la compose avec la fonction racine carrée qui est définie et continue sur $[0,+\infty[$, et de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$. Donc, par composition, $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$. Finalement, par multiplication de fonctions de classe C^∞, la fonction g est donc définie et de classe C^∞, donc C^2, sur $]0,+\infty[$.

2. Les dérivées successives de la fonction f sont données par

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
$$f''(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, de sorte que

$$f(1) = \frac{e^2-1}{2e},\ f'(1) = \frac{e^2+1}{2e} \text{ et } f''(1) = \frac{e^2-1}{2e}.$$

Le développement limité de f à l'ordre 2 au point 1 est donc

$$f(x) = \frac{e^2-1}{2e} + \frac{e^2+1}{2e}(x-1) + \frac{e^2-1}{4e}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x-1),$$

où $\varepsilon(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$.
De même, les dérivées successives de la fonction g sont données par

$$g'(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{x} + \frac{\ln(x)}{2\sqrt{1+x}},$$
$$g''(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x}} - \frac{\sqrt{1+x}}{x^2} - \frac{\ln(x)}{4(1+x)^{\frac{3}{2}}},$$

pour tout $x \in]0,+\infty[$, de sorte que

$$g(1) = 0,\ g'(1) = \sqrt{2} \text{ et } g''(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Le développement limité de g à l'ordre 2 au point 1 est donc

$$g(x) = \sqrt{2}(x-1) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-1)^2 + (x-1)^2\tilde{\varepsilon}(x-1),$$

où $\bar{\varepsilon}(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$.

3. D'après les formules de la question 2, la fonction h est égale à

$$h(x) = 2e\frac{f(x) - \frac{e^2+1}{2e}(x-1) - \frac{e^2-1}{2e}}{\sqrt{2}(x-1) - g(x)} = 2e\frac{\frac{e^2-1}{4e}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x-1)}{\frac{1}{2\sqrt{2}}(x-1)^2 - (x-1)^2\bar{\varepsilon}(x-1)} = 2e\frac{\frac{e^2-1}{4e} + \varepsilon(x-1)}{\frac{1}{2\sqrt{2}} - \bar{\varepsilon}(x-1)},$$

au voisinage de 1. Comme les fonctions ε et $\bar{\varepsilon}$ ont une limite égale à 0 en 0, la fonction h a une limite au point 1 donnée par

$$h(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \sqrt{2}(e^2-1).$$

4. La tangente de la fonction f au point 1 a pour équation $y = \frac{e^2-1}{2e} + \frac{e^2+1}{2e}(x-1)$. D'après la question 2, la fonction f vérifie

$$f(x) - \frac{e^2-1}{2e} - \frac{e^2+1}{2e}(x-1) = \frac{e^2-1}{4e}(x-1)^2\left(1+\varepsilon(x-1)\right),$$

au voisinage de 1. Comme $e^2 > 1$, le membre droit de l'équation ci-dessus a un signe positif au voisinage de 1, ce qui prouve que la tangente de f au point 1 est au-dessus du graphe de f au voisinage de 1.

De même, la tangente de la fonction g au point 1 a pour équation $y = \sqrt{2}(x-1)$. D'après la question 2, la fonction g vérifie

$$g(x) - \sqrt{2}(x-1) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(x-1)^2\left(1+\bar{\varepsilon}(x-1)\right),$$

quantité qui a un signe négatif au voisinage de 1. Ainsi, la tangente de g au point 1 est-elle au-dessous du graphe de g au voisinage de 1.

5. Le coût moyen f_M est égale à

$$\forall x > 0, f_M(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{e^x - e^{-x}}{2x},$$

tandis que le coût marginal vaut

$$\forall x > 0, f_m(x) = f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

6. La variation relative du coût f au niveau de production $x = 1$ est égale à

$$\frac{\Delta_1(f)(x-1)}{f(1)} = \frac{f(x) - f(1)}{f(1)}.$$

On l'approche par la formule

$$\frac{\Delta_1(f)}{f(1)} \approx e_f(1)\frac{\Delta_1(x)}{1} = \frac{f'(1)}{f(1)}(x-1) = \frac{e^2+1}{e^2-1}(x-1).$$

Lorsque l'on augmente la production de 2%, celle-ci devient égale à $x = 1,02$, de sorte qu'une valeur approchée de la variation relative du coût de production est donnée par

$$\frac{f(1,02) - f(1)}{f(1)} \approx 0,02\frac{e^2+1}{e^2-1}(\approx 0,029 = 2,9\%).$$

7. La dérivée de la fonction f vérifie

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0,$$

de sorte que la fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Comme la fonction f est de plus continue sur $]0, +\infty[$, et qu'elle a des limites égales à 0 en 0, et à $+\infty$ en $+\infty$, il s'agit d'une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.

8. Soit $y \in]0, +\infty[$. La valeur de la bijection réciproque f^{-1} en y est par définition donnée par le réel x solution de l'équation

$$y = f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Il s'agit donc de résoudre cette équation en fonction de y. En posant $X = e^x$, cette équation est équivalente à

$$y = \frac{X - \frac{1}{X}}{2} = \frac{X^2 - 1}{2X},$$

puis à

$$X^2 - 2yX - 1 = 0.$$

Le discriminant de ce trinôme est égal à

$$\Delta = 4(y^2 + 1) > 0,$$

de sorte que

$$X = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

Cependant, $X = e^x$ est une quantité positive, ce qui induit que

$$e^x = X = y + \sqrt{y^2 + 1},$$

c'est-à-dire que

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

D'où l'expression de la bijection réciproque f^{-1}

$$\forall y > 0, f^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

9. Lorsque $x > e$, la quantité $f(x)g(x)$ est strictement positive de sorte que l'élasticité $e(fg)$ est bien définie et vaut

$$e(fg)(x) = x\frac{(fg)'(x)}{f(x)g(x)} = x\frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{f(x)g(x)} = x\frac{f'(x)}{f(x)} + x\frac{g'(x)}{g(x)},$$

soit, d'après les formules de la question 2,

$$e(fg)(x) = x\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + \frac{2(x+1) + x\ln(x)}{2(1+x)\ln(x)}.$$