

$$f(x) = \frac{(x-1)\ln(x-1) - x}{2(x-1)}$$

1/ $D_f =]1; +\infty[$. La fonction $x \mapsto \ln(x-1)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1; +\infty[$.

f est donc le quotient de 2 fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1; +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas. IP d'annuit donc que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1; +\infty[$.

2/ $f(2+h) = f(2) + f'(2)h + \frac{f''(2)}{2}h^2 + h^3\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

$$f(2) = -1$$

$$\forall x > 1, f'(x) = \frac{2(x-1)(\ln(x-1) + 1 - 1) - 2((x-1)\ln(x-1) - x)}{4(x-1)^2}$$

$$= \frac{x}{2(x-1)^2} \quad \text{donc } f'(2) = 1$$

$$\forall x > 1, f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-1)^2 - 2(x-1)x}{(x-1)^4} = -\frac{x+1}{2(x-1)^3} \quad \text{donc } f''(2) = -\frac{3}{2}$$

Enfinement, $f(2+h) = -1 + h - \frac{3}{4}h^2 + h^3\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

3/ $f_2(x) = f(2) + f'(2)(x-2) = -1 + x - 2 = x - 3$.

$f''(2) < 0$ donc au voisinage de $(2, -1)$ le graphe de f est situé au dessous de sa tangente.

4/ $\forall x > 1, e_f(x) = x \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x^2}{(x-1)((x-1)\ln(x-1) - x)}$

5/ On a $\frac{\Delta f}{f} \approx e_f(2) \frac{\Delta x}{x}$. Ici, $\frac{\Delta x}{x} = -0,03$ et $e_f(2) = -2$.

d'où $\frac{\Delta f}{f} = 0,06$ et f doit augmenter d'environ 6%.

6/ Si $\frac{\Delta f}{f} = 0,05$, on doit avoir $\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{e_f(2)} \frac{\Delta f}{f} = -0,025$,

c'est-à-dire x doit diminuer de 2,5% environ.