

Exercice 2:

Soit

$$P(x) = \frac{20x^2 - 18x + 11}{(2x-1)^2(x+3)}$$

On considère : $P(x) = \frac{a}{(2x-1)^2} + \frac{b}{x+3}$

$$= \frac{a(x+3) + b(2x-1)^2}{(2x-1)^2(x+3)}$$

$$= \frac{ax + 3a + b(4x^2 - 4x + 1)}{(2x-1)^2(x+3)}$$

$$= \frac{4bx^2 - 4bx + ax + 3a + b}{(2x-1)^2(x+3)}$$

$$= \frac{4bx^2 - 4bx + ax + 3a + b}{(2x-1)^2(x+3)}$$

Par identification :

$$\begin{cases} 4bx^2 = 20x^2 \\ -4bx + ax = -18x \\ 3a + b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \\ a = 2 \end{cases}$$

par suite :

$$P(x) = \frac{2}{(2x-1)^2} + \frac{5}{x+3}$$

Donc :

$$* P'(x) = \frac{(-2) \times 2}{(2x-1)^3} + \frac{(-5)}{(x+3)^2}$$

$$DP' = DP.$$

$$* P''(x) = \frac{(-2) \times 2 \times (-3) \times 2}{(2x-1)^4} + \frac{(-5)(-2)}{(x+3)^3}$$

$$DP'' = DP.$$

$$* P'''(x) = \frac{2 \times (-2) \times (-3) \times 2 \times (-4) \times 2}{(2x-1)^5} + \frac{5(-1)(-2)(-3)}{(x+3)^4}$$

$$DP'''(x) = DP.$$

par suite ; on peut tirer.

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$$P^{(n)}(x) = \left[\frac{(-1)^n \times (2)^{n+1} \times (n+1)!}{(2x-1)^{n+2}} \right] + \left[\frac{5 \times (-1)^n \times n!}{(x+3)^{n+1}} \right]$$

$$DP^{(n)} = DP$$