Dugead 1
UE 13 Maths.

Corrigé du contrôle continu du 23/11/10

Exercice 1 : 1 faux, 2 vrai, 3 faux, 4 faux
(ex $\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$) (produit scalaire) (rayon $\sqrt{2}$) (vrai seult si f admet un point critique)

Exercice 2

1 f est définie sur tout $\mathbb{R}$ et de classe C^2 comme produit d'un polynôme et d'une exponentielle.

2 $f'(x) = e^{-x}\left(2(x-1) - (x-1)^2\right) = e^{-x}(x-1)(3-x) = e^{-x}(-x^2+4x-3)$

$f''(x) = e^{-x}(-2x+4+x^2-4x-3) = e^{-x}(x^2-6x+7)$

3 On a $f(0)=1$, $f'(0)=-3$, $f''(0)=7$, d'où le DL de f au 2 ième ordre en 0 :

$f(x) = 1 - 3x + \frac{7}{2}x^2 + \varepsilon(x)x^2$ avec $\varepsilon(x)\to 0$ lorsque $x\to 0$

4 L'équation de la tangente en zéro est donc $y = 1-3x$ et la courbe représentative de f est au-dessus de sa tangente en zéro car $7/2 > 0$.

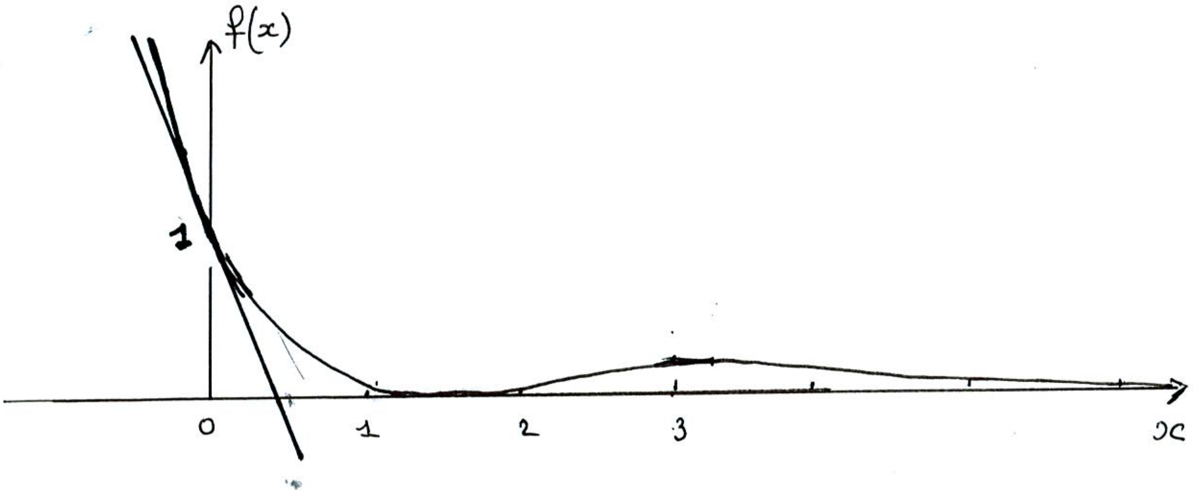
5 L'approximation affine de f en 0 est $\hat{f}_0(x) = 1-3x$
Donc $f(0{,}1) = 0{,}81\, e^{-0{,}1} \simeq \hat{f}_0(0{,}1) = 0{,}7$

6 On a $f(x)\geq 0$ pour tout x et $f(x)>0$ pour tout $x\neq 1$, $f(1)=0$. Donc f présente un unique minimum global en 1. Comme $f(x)\to+\infty$ lorsque $x\to-\infty$, f n'admet pas de maximum global. Pour trouver les extrémas locaux, calculons les solutions de

$$f'(x) = e^{-x}(x-1)(3-x) = 0$$

On retrouve 1 et on obtient $f'(3)=0$. On a $f''(3)<0$ donc f admet un maximum local en 3. On a $f(3)=4e^{-3}$.

7



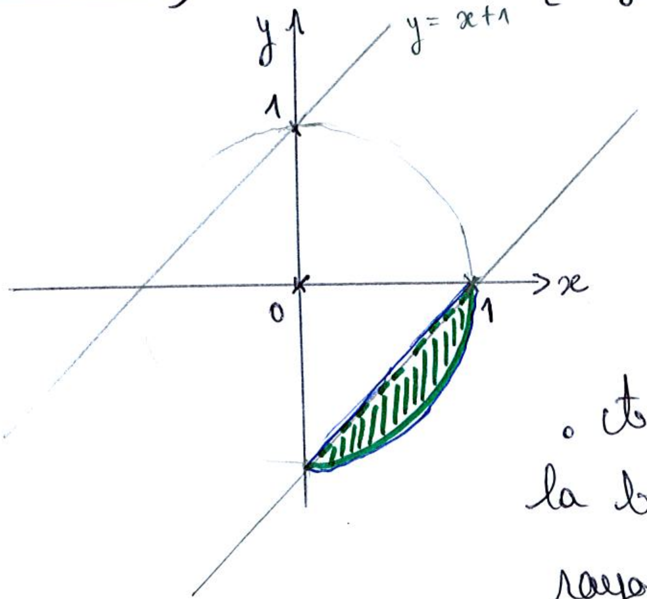
8 $e_f(x) = x\dfrac{f'(x)}{f(x)} = x\left(\dfrac{3-x}{x-1}\right)$

9 (a) On a $f(2,1)-f(2) \simeq f'(2)\times 0,1 = e^{-2}\times 0,1$
Donc si x augmente de 0,1 à partir de 0,1, $f(x)$ augmente de $e^{-2}\times 0,1$.

(b) On a $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{f(2)} \simeq e_f(2)\dfrac{h}{2} = 2\times\dfrac{h}{2}$

Donc si f a diminué de 5 %, x a diminué de 2,5 %.
La nouvelle valeur de x est 1,95.

Exercice 3 1) Soit $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y < x-1,\ y < 1+x \text{ et } x^2+y^2 \le 1\}$



• A n'est ni ouvert ni fermé

• A est borné car il est inclus dans la boule fermée de centre (0,0) et de rayon 1.

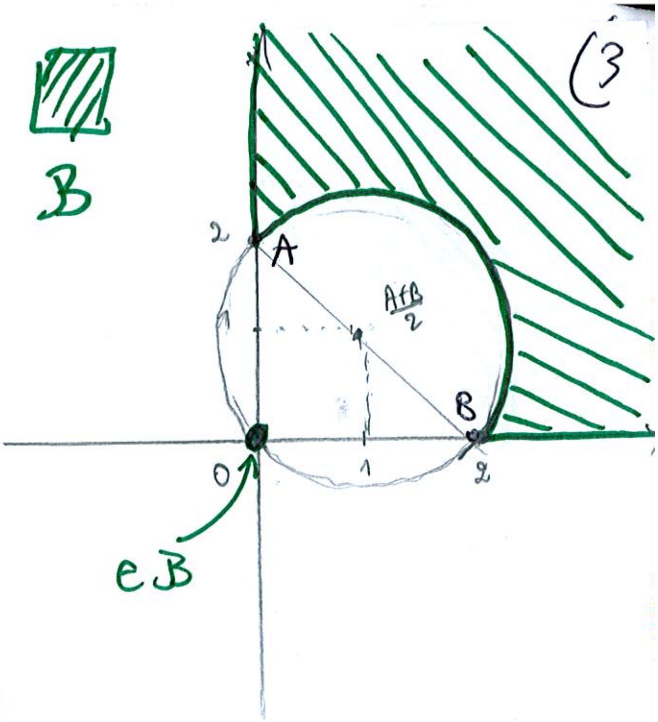
• A est convexe car c'est l'intersection de 3 ensembles convexes : la boule $\overline{B}((0,0), 1)$, le demi-plan ouvert $\{y < 1+x\}$ et le demi-plan ouvert $\{y < x-1\}$

2) B est le complémentaire de la boule ouverte centrée en (1,1) et de rayon $\sqrt{2}$, restreint au quart de plan $x \ge 0$ et $y \ge 0$. NB B contient en plus le point (0,0) !

• B est fermé

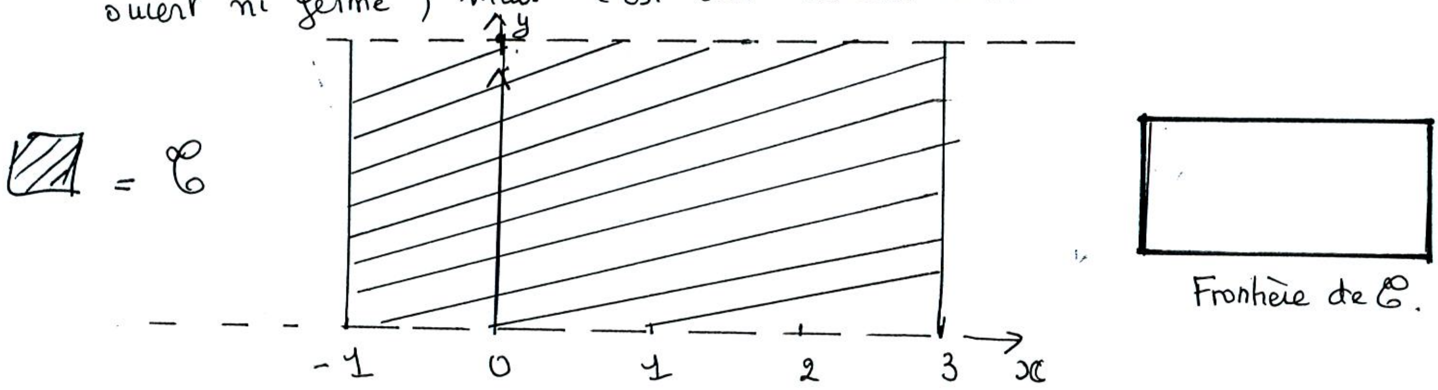
• B n'est pas borné car B contient la demi-droite d'équation $\begin{cases} x \geq 1 \\ y = 0 \end{cases}$.

- B n'est pas convexe : le point $A(2,0) \in B$, $B(0,2) \in B$ mais le milieu $\frac{A+B}{2} = (1,1)$ appartient à la boule, donc n'appartient pas à B



3.) Remarquons que $x^2 - 2x - 3 \leq 0 \iff (x+1)(x-3) \leq 0 \iff -1 \leq x \leq 3$
et que $|y-1| < 1 \iff \begin{cases} y-1 < 1 \\ -y+1 < 1 \end{cases} \iff 0 < y < 2$

Donc $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 3 \text{ et } 0 < y < 2\}$. $\mathcal{C}$ n'est ni ouvert ni fermé, mais c'est un convexe borné



B est borné car il est inclus dans le rectangle $[-3,3] \times [-2,2]$.

B est convexe car c'est l'intersection de 4 demi-plans $\{x \geq -1\}$, $\{x \leq 3\}$, $\{0 < y\}$ et $\{y < 2\}$.