Correction du test du 1er décembre 2009

Exercice 1.

1/ $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ avec $\mathcal{A}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x + 2y > 4\}$

et $\mathcal{A}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } |2x-3| < y+1\} = \mathcal{A}_2' \cap \mathcal{A}_2''$

avec $\mathcal{A}_2' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } 2x-3 < y+1\}$ et $\mathcal{A}_2'' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } 2x-3 > -y-1\}$

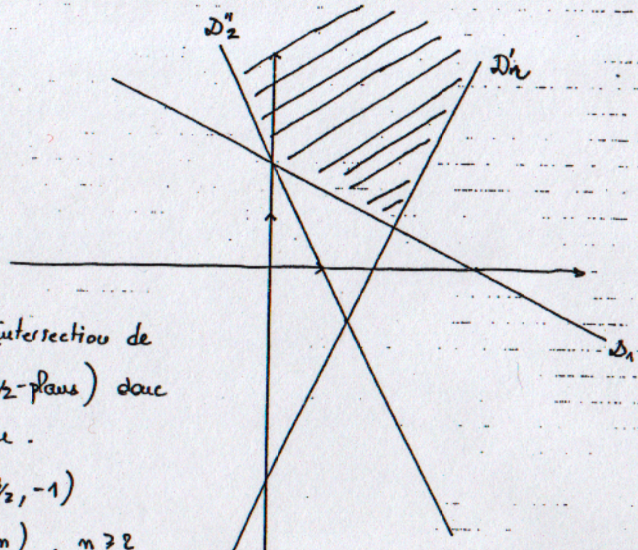
On définit : - $\mathcal{D}_1$: droite d'équation $x + 2y = 4$ (passe par $(4,0)$ et $(0,2)$).

- $\mathcal{D}_2'$: droite d'équation $2x - y - 4 = 0$ (passe par $(0,4)$ et $(2,0)$).

- $\mathcal{D}_2''$: droite d'équation $2x + y - 2 = 0$ (passe par $(0,2)$ et $(1,0)$).

On a :

- $\mathcal{A}_1$: ½-plan ouvert de frontière $\mathcal{D}_1$ et contenant $(1,2)$ dans son intérieur.
- $\mathcal{A}_2'$: " " " $\mathcal{D}_2'$ " " $(0,0)$ " "
- $\mathcal{A}_2''$: " " " $\mathcal{D}_2''$ " " $(1,1)$ " "



$\mathcal{A}$ est 1 intersection de 3 convexes (½-plans) donc est convexe.

Soit $A = (3/2, -1)$

$M_n = \left(\frac{3}{2}, n\right)$, $n \geq 2$

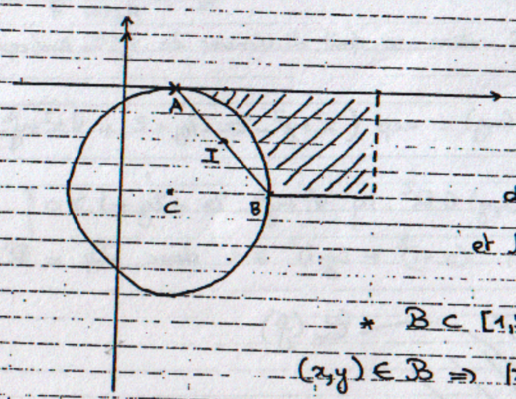
$M_n \in \mathcal{A}$, $\forall n \geq 2$

et $d(M_n, A) = n+1 \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\mathcal{A}$ n'est pas borné.

2/ * $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cap ([1,5[\times [-2,0])$, avec $\mathcal{B}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 \geq 0\}$

$(x,y) \in \mathcal{B}_1 \iff (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + 1 \geq 0 \iff (x-1)^2 + (y+2)^2 \geq 4$

donc $\mathcal{B}_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{B}((1,-2), 2)$.



* $A = (1,0)$ et $B = (3,-2)$ sont dans $\mathcal{B}$. Prenons

$I = \frac{A+B}{2} = (2,-1)$

$d(I,C) = \sqrt{2} < 4$ donc $I \notin \mathcal{B}$

et $\mathcal{B}$ n'est pas convexe.

* $\mathcal{B} \subset [1,5[\times [-2,0]$ donc

$(x,y) \in \mathcal{B} \Rightarrow |x| \leq 5$ et $|y| \leq 2$

d'où $\mathcal{B}$ est borné.

Exercice 2

$$f(x) = \frac{(x-1)\ln(x-1) - x}{2(x-1)}$$

1/ $\mathcal{D}_f =]1;+\infty[$. La fonction $x \mapsto \ln(x-1)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1;+\infty[$

f est donc le quotient de 2 fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1;+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Il s'ensuit donc que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1;+\infty[$.

2/ $f(2+h) = f(2) + f'(2)h + \frac{f''(2)}{2}h^2 + h^2\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

. $f(2) = -1$

. $\forall x > 1$, $f'(x) = \frac{2(x-1)\left(\ln(x-1) + 1 - 1\right) - 2\left((x-1)\ln(x-1) - x\right)}{4(x-1)^2}$

$= \frac{x}{2(x-1)^2}$ donc $f'(2) = 1$

. $\forall x > 1$, $f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-1)^2 - 2(x-1)x}{(x-1)^4} = -\frac{x+1}{2(x-1)^3}$ donc $f''(2) = -\frac{3}{2}$

Finalement, $f(2+h) = -1 + h - \frac{3}{4}h^2 + h^2\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

3/ $\hat{f}_2(x) = f(2) + f'(2)(x-2) = -1 + x - 2 = x - 3$.

$f''(2) < 0$ donc au voisinage de $(2,-1)$ le graphe de f est situé en dessous de sa tangente.

4/. $\forall x > 1, \quad e_f(x) = x\,\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x^2}{(x-1)\left((x-1)\ln(x-1) - x\right)}$

5/. On a $\frac{\Delta f}{f} \simeq e_f(2)\,\frac{\Delta x}{x}$. Ici, $\frac{\Delta x}{x} = -0{,}03$ et $e_f(2) = -2$

d'où $\frac{\Delta f}{f} = 0{,}06$ et f doit augmenter d'environ 6%.

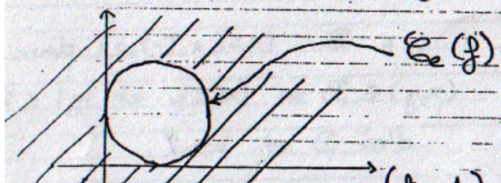
6/. Si $\frac{\Delta f}{f} = 0{,}05$, on doit avoir $\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{e_f(2)}\,\frac{\Delta f}{f} = -0{,}025$,

c'est-à-dire x doit diminuer de 2,5% environ.

Exercice 3. $f(x,y) = \exp\left(x^2+y^2-2x-2y+2+\sqrt{x^2+y^2-2x-2y+1}\right)$.

1/. $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x^2+y^2-2x-2y+1 \geq 0\}$.

$(x,y) \in \mathcal{D}_f \iff (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 1$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus B((1,1),1)$.



(fig. 1)

2/. Posons $P(x,y) = x^2+y^2-2x-2y+2 = (x-1)^2+(y-1)^2$

alors $f(x,y) = \exp\left(P(x,y) + \sqrt{P(x,y)-1}\right)$.

P est un polynôme et est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. D'autre part,

$g : z \longmapsto \exp\left(z + \sqrt{z-1}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$. On en déduit

que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } P(x,y) > 1\} = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}((1,1),1)$.

3/. Soit $(x_0,y_0) \in \mathcal{A}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = g'(P(x_0,y_0))\,\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 2(x_0-1)\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x_0^2+y_0^2-2x_0-2y_0+1}}\right) f(x_0,y_0)$.

$f(x,y) = f(y,x)$ donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(y_0,x_0) = 2(y_0-1)\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{P(x_0,y_0)-1}}\right) f(x_0,y_0)$

4/. $\forall z \in \mathbb{R}$, $\exp(z) > 0$ donc $\forall k < 0$, $\mathcal{C}_k(f) = \emptyset$.

5/. $\mathcal{C}_e(f) = \{(x,y) \in \mathcal{D}_f \text{ tq } f(x,y) = e\}$, $f(x,y) = e \iff P(x,y) + \sqrt{P(x,y)-1} = 1$

$(x,y) \in \mathcal{D}_f \iff P(x,y) \geq 1$. Or $1 - P(x,y) = \sqrt{P(x,y)-1} \geq 0$ donc $P(x,y) \leq 1$.

Finalement, $\mathcal{C}_e(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } P(x,y) = 1\} = \mathcal{C}((1,1),1)$ (cf. fig. 1)