
Contrôle continu n° 1 : le premier décembre 2009

Les documents et calculatrices sont interdits. La qualité de rédaction et de la présentation entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Ne pas oublier pas de marquer le numéro de votre groupe.

Exercice 1 1. Représenter graphiquement les ensembles suivants. Sont-ils bornés ? Convexes ?
On demande de justifier les réponses.

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |2x - 3| < y + 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + 2y > 4\}.$$

$$\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 \geq 0\} \cap ([1, 5] \times [-2, 0]).$$

2. Déterminer l'équation du plan \mathcal{P} passant par le point $(1, 4, -8)$ et orthogonal au vecteur $v = (6, 5, 4)$.

Exercice 2 Soit la fonction

$$f(x) = \frac{(x-1)\ln(x-1) - x}{2x-2}$$

1. Donner le domaine de définition de f et montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur son domaine de définition.
2. Donner au point 2 un développement limité de f à l'ordre 2.
3. Préciser l'approximation affine de f au point 2 et donner la position de la tangente au voisinage de ce point.
4. Calculer l'élasticité de f sur son domaine de définition.
5. Donner une valeur approchée de la variation relative de f lorsque x diminue de 3% à partir de 2.
6. A partir de 2 de combien doit varier x pour que la valeur approchée de la variation relative de f augmente de 5%.

Exercice 3 Soit maintenant la fonction

$$f(x, y) = \exp\left(x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 + \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1}\right)$$

1. Donner et tracer le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur un certain ensemble \mathcal{A} que l'on précisera. On admet que cet ensemble est un ouvert de \mathbb{R}^2 .
3. Calculer le gradient de f en tout point de \mathcal{A} .
4. Pour tout $k \leq 0$, donner la courbe de niveau k de f .
5. Donner et tracer la courbe de niveau e de f .