c) La fonction h est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, on recherche les points critiques. Ils doivent vérifier le système suivant

$$\begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

Le système donne alors $x = 0$ et $y = -1$ ou $y = -1$. On a donc deux points critiques : $(0, -1)$ et $(0, 1)$. Calculons la matrice hessienne de h. Pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$D^2h(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}.$$

Aux deux points critiques, on a $rt - s^2 = 0$, et la méthode proposée ne peut pas aboutir. En fait, on remarque que h est une fonction à variables séparées : $x \mapsto x^4$ et $y \mapsto y^3 - 3\,y - 2$. La première fonction admet en 0 un minimum global et la seconde réalise, en $y = -1$, un maximum local et, en $y = 1$, un minimum local. Ainsi, on voit que le point $(0, -1)$ est un point col pour h et que h réalise en $(0, 1)$ un minimum local. Ce minimum n'est pas global, puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x, 0) = -\infty$.

d) La fonction k est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, on recherche les points critiques. Ils doivent vérifier le système suivant

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 - 2xy = 0 \\ 2xy - x^2 - 3y^2 = 0 \end{cases}$$

Si on additionne les deux équations, le système donne $x^2 = y^2$, donc soit $x = y$, soit $x = -y$. Dans les deux cas, on ne trouve qu'un seul point critique $(0, 0)$. Calculons la matrice hessienne de k. Pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$D^2k(x, y) = \begin{pmatrix} 6x - 2y & 2y - 2x \\ 2y - 2x & 2x - 6y \end{pmatrix}.$$

Au point $(0, 0)$, on a $rt - s^2 = 0$, donc on ne peut pas conclure directement. Mais, on observe que $k(x, 0) = x^3$, qui change de signe, ainsi $(0, 0)$ est un point col.