Exo 66

1. D'après son tableau de variations, la fonction f réalise en $x = 2$ un maximum global de valeur $f(2) = 8 + b^2$. De même g réalise en $y = 2$ un maximum global de valeur $g(2) = 8 - a^2$.
Les points critiques de h doivent vérifier le système

$$\begin{cases} 8 - 6x = 0 \\ 8 - 2y = 0, \end{cases}$$

qui a pour unique solution $x = 4/3$ et $y = 4$. On montre aisément que h, polynôme de degré 2, est concave et donc que h réalise en $(4/3, 4)$ un maximum global de valeur $64/3$.

2. a) Si on note P_1 et P_2 les profit des deux firmes on a $P_1(q_1) = 10q_1 - C_1(q_1, q_2)$ et $P_2(q_2) = 10q_2 - C_1(q_1, q_2)$. On remarque que $P_1(q_1) = f(q_1)$ et $P_2(q_2) = g(q_2)$. Donc pour optimiser leur profit, le directeur de la première firme doit produire la quantité $q_1 = 2$ et le second directeur la quantité $q_2 = 2$. Pour la première firme le profit optimal sera de $8 + q_2^2 = 12$ tandis que pour la seconde firme le profit optimal sera de $8 - q_1^2 = 4$.

   b) Si maintenant les firmes fusionnent, le profit global sera de $P(q_1, q_2) = P_1(q_1) + P_2(q_2)$ et on remarque que $P(q_1, q_2) = h(q_1, q_2)$. Le profit maximal est alors réalisé lorsque $(q_1, q_2) = (4/3, 4)$, et on a dans ce cas $P(4/3, 4) = 64/3$.
   Si on veut optimiser le profit, la fusion est souhaitable : $64/3$ est le maximum global de la fonction P, il est donc supérieur à la somme des profits maximaux des fonctions P_1 et P_2, qui vaut 16.