Correction Exo 1.69

Étude de f_1

Les fonctions f_1 et g_1 sont des polynômes donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. La contrainte définit le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $1/2$. Un cercle est un ensemble compact, donc d'après

f_1 admet un minimum global et un maximum global sous la contrainte.

➤ *Recherche des points critiques de seconde espèce :* d'après la remarque 21.6 page 217, il n'y a pas de point critique de seconde espèce sur un cercle.

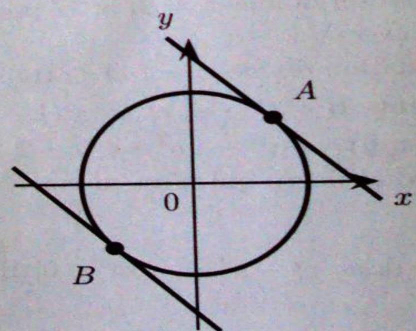
➤ *Recherche des points critiques de première espèce :* on résout le système

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

On a forcément $\lambda \neq 0$ car $\lambda = 0$ est incompatible avec le système, donc les deux premières équations sont équivalentes à $x = y = \frac{1}{2\lambda}$. On reporte dans la troisième équation pour trouver la valeur de λ : $\frac{1}{2\lambda^2} = \frac{1}{4}$, c'est-à-dire $\lambda^2 = 2$, donc $\lambda = \pm\sqrt{2}$. On trouve deux points critiques : $A = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ avec $\lambda_A = +\sqrt{2}$ et $B = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ avec $\lambda_A = -\sqrt{2}$.

➤ *Étude des points critiques de première espèce :* on doit trouver un maximum global et un minimum global sous la contrainte. Or, $f(A) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $f(B) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, donc f_1 réalise en A un maximum global sous la contrainte et en B un minimum global sous la contrainte.

➤ On peut proposer pour cette fonction une résolution géométrique à l'aide des courbes de niveau de la fonction f_1.



Les courbes de niveau de f_1 sont les droites d'équation $x + y = k$, pour $k \in \mathbb{R}$. Elles sont parallèles entre elles, et à k fixé, elles passent par les points $(k, 0)$ et $(0, k)$. Il n'y a que deux de ces droites qui sont tangentes au cercle : celle qui correspond au niveau $k_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et celle qui correspond au niveau $k_{\min} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ces deux courbes de niveau sont représentées sur le dessin ci-dessus. La première est tangente au cercle au point A, qui réalise donc le maximum global, et la deuxième au point B, qui donne le minimum global.

Étude de f_2

Les fonctions f_2 et g_2 sont des polynômes donc des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. En réécrivant la contrainte sous la forme, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$, on voit qu'il s'agit du cercle de centre $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Comme c'est un cercle il n'y a pas de point critique de seconde espèce d'après la remarque 21.6.

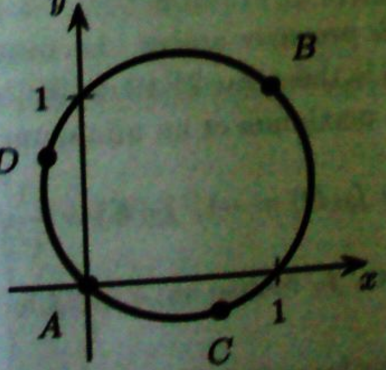
➤ *Recherche des points critiques de première espèce :* on résout le système

$$\begin{cases} y = \lambda(2x-1) \\ x = \lambda(2y-1) \\ x^2 + y^2 - x - y = 0. \end{cases}$$

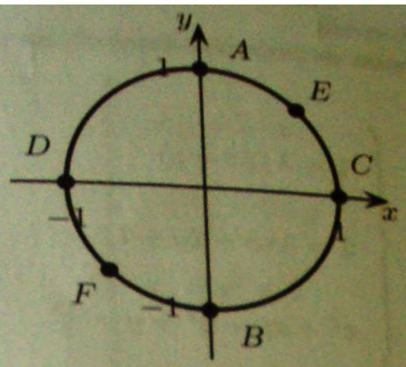
En soustrayant la deuxième équation à la première, on trouve que la deuxième équation est équivalente à $(1+2\lambda)(y-x) = 0$. Donc, soit $\lambda = -\frac{1}{2}$ ou alors $x = y$. Si $x = y$, la troisième équation donne $2x^2 - 2x = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 1$. En utilisant la première équation pour trouver la valeur du multiplicateur, on trouve les deux points $A = (0,0)$ avec $\lambda_A = 0$ et $B = (1,1)$ avec $\lambda_B = 1$. Si $\lambda = -\frac{1}{2}$, la première équation donne $y = -x + \frac{1}{2}$. En reportant dans la troisième équation, on arrive à $2x^2 - x - \frac{1}{4} = 0$. Ce trinôme admet deux solutions $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{4}$. On trouve donc deux autres points $C = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}, \frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)$ et $D = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}, \frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)$ avec $\lambda_C = \lambda_D = -\frac{1}{2}$.

➤ *Étude des points critiques de première espèce :* La contrainte définit un cercle, donc un ensemble compact. D'après le théorème 21.10 de Weierstrass page 220, puisque f_2 est continue sur $\mathbb{R}^2$, elle admet un maximum et un minimum global sous contrainte. Or, $f_2(A) = 0$, $f_2(B) = 1$, $f_2(C) = f_2(D) = -\frac{1}{8}$, donc f_2 réalise en B le maximum global sous la contrainte, et en C et D, le minimum global sous la contrainte. Il faut faire une étude locale pour le point $(0,0)$. Le lagrangien en $(0,0)$ est $\mathcal{L}_0(x,y) = xy$, puisque le multiplicateur est nul. C'est un polynôme du second degré qui n'est ni convexe, ni concave, donc $(0,0)$ est un point selle du lagrangien. Nous allons montrer de 3 façons différentes que $(0,0)$ donne un maximum local.

Première méthode. On remarque sur le dessin ci-dessous, que les points du cercle au voisinage de $(0,0)$ ont des coordonnées de signes différents. Autrement dit, au voisinage de $(0,0)$ sur le cercle, f_2 prend des valeurs négatives ou nulles. Or, $f(0,0) = 0$, donc f_2 réalise en $(0,0)$ un maximum local.



Deuxième méthode. Lorsque la contrainte est une courbe, ici un cercle, on peut raisonner comme pour les fonctions d'une variable : un point critique entre deux minima globaux, ici C et D. Si on décrit le cercle dans le de D vers C, on passe forcément par un maximum local. C'est ce que l'on appelle la résolution graphique



Nous allons valider ces résultats à l'aide de la méthode du lagrangien. Le lagrangien s'écrit $\mathcal{L}_{\frac{3\epsilon}{2\sqrt{2}}}(x,y) = x^3 + y^3 - \dfrac{3\epsilon}{2\sqrt{2}}(x^2+y^2-1)$, avec $\epsilon = 1$ pour E et $\epsilon = -1$ pour F.

La matrice hessienne est donc $D^2\mathcal{L}_{\frac{3\epsilon}{2\sqrt{2}}}(x,y) = \begin{pmatrix} 6x - \frac{3\epsilon}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 6y - \frac{3\epsilon}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Comme $D^2\mathcal{L}_{3/(2\sqrt{2})}(E) = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, on a $rt - s^2 = \frac{9}{2} > 0$ et $r = t = \frac{3}{\sqrt{2}} > 0$, donc f_3 réalise en E un minimum local sous la contrainte.

De même, $D^2\mathcal{L}_{-3/(2\sqrt{2})}(F) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, avec $rt - s^2 = \frac{9}{2} > 0$ et $r = t = -\frac{3}{\sqrt{2}} > 0$, donc f_3 réalise en F un maximum local sous la contrainte.

Étude de f_4

Les fonctions f_4 et g_4 sont des polynômes donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. On peut montrer que g_4 décrit un ensemble compact mais ce n'est pas évident de montrer qu'il est borné. Nous allons raisonner autrement.

➤ *Recherche des points critiques de seconde espèce :* on résout le système

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \\ x^2 + xy + y^2 + y = \frac{13}{9}. \end{cases}$$

La première équation donne $y = -2x$, que l'on reporte dans la deuxième pour trouver que $x = 1/3$ puis que $y = -2/3$. Le couple $(1/3, -2/3)$ ne vérifie pas la troisième équation donc il n'y pas de point critique de seconde espèce.

Troisième méthode. On linéarise la contrainte. La forme quadratique associée à la matrice hessienne au point $(0,0)$ est $d^2\mathcal{L}_{O(0,0)}(h,k) = hk$, qui change de signe pour (h,k) au voisinage de $(0,0)$. Comme $\nabla g_2(0,0) = (-1,-1)$, on restreint l'étude du signe de cette forme quadratique aux couples (h,k) tels que $h+k=0$, c'est-à-dire $k=-h$. Or, $d^2\mathcal{L}_{O(0,0)}(h,-h) = -h^2 \leqslant 0$, donc $(0,0)$ donne bien un maximum local.

Étude de f_3

Les fonctions f_3 et g_3 sont des polynômes, donc des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. La contrainte définit le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1, donc c'est un ensemble compact sur lequel f_3 atteint son maximum global et son minimum global d'après le théorème

En outre, d'après la remarque 21.6, il n'y a pas de point critique de seconde espèce.

➤ *Recherche des points critiques de première espèce :* on résout le système

$$\begin{cases} 3x^2 = 2\lambda x \\ 3y^2 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

La première équation est équivalente à $x(3x - 2\lambda) = 0$, donc soit $x = 0$, soit $x = \frac{2\lambda}{3}$. De même, la deuxième équation est équivalente à $y(3y - 2\lambda) = 0$, donc soit $y = 0$, soit $y = \frac{2\lambda}{3}$. Si $x = 0$, nécessairement $y = \frac{2\lambda}{3}$, car $(0,0)$ n'est pas sur le cercle. En reportant dans la troisième équation, on trouve que $\lambda = \pm 3/2$. On a donc deux points $A = (0,1)$ avec $\lambda_A = 3/2$ et $B = (0,-1)$ avec $\lambda_B = -3/2$. Si $x = \frac{2\lambda}{3}$, on a deux possibilités soit $y = 0$, soit $y = \frac{2\lambda}{3}$. Comme les variables x et y jouent des rôles symétriques dans la fonction et dans la contrainte, dans le cas où $y = 0$ on trouve les points $C = (1,0)$ avec $\lambda_C = 3/2$ et $D = (-1,0)$ avec $\lambda_D = -3/2$. Finalement, lorsque $x = y = \frac{2\lambda}{3}$, en reportant dans la troisième équation on trouve que $\frac{8\lambda^2}{9} = 1$, donc $\lambda = \pm\frac{3}{2\sqrt{2}}$. On a les deux points supplémentaires $E = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ avec $\lambda_E = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ et $F = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ avec $\lambda_F = -\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

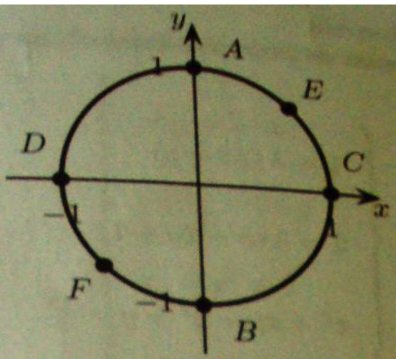
➤ *Étude des points critiques de première espèce :* la contrainte est un cercle, donc définit un ensemble compact.

puisque f_3 est continue sur $\mathbb{R}^2$, elle admet un maximum et un minimum global sous contrainte. Comme

$$f_3(A) = f_3(C) = 1,\ f_3(B) = f_3(D) = -1,\ f_3(E) = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \text{ et } f_3(F) = -\frac{1}{\sqrt{2}} > -1,$$

on trouve que sous la contrainte, f_3 réalise en A et C le maximum global et en B et D le minimum global.

Il faut faire une étude locale pour les points E et F. Comme le point E se trouve entre les points A et C sur le cercle, et que f_3 réalise en A et C des maxima, la méthode graphique nous dit que f_3 réalise en E un minimum local. De la même manière, comme le point F se trouve entre les points B et D sur le cercle, f_3 réalise sous la contrainte un maximum local en F. Les points critiques sont représentés sur le dessin ci-dessous.



Nous allons valider ces résultats à l'aide de la méthode du lagrangien. Le lagrangien s'écrit $\mathcal{L}_{\frac{3\epsilon}{2\sqrt{2}}}(x,y) = x^3 + y^3 - \dfrac{3\epsilon}{2\sqrt{2}}(x^2+y^2-1)$, avec $\epsilon = 1$ pour E et $\epsilon = -1$ pour F.

La matrice hessienne est donc $D^2\mathcal{L}_{\frac{3\epsilon}{2\sqrt{2}}}(x,y) = \begin{pmatrix} 6x - \frac{3\epsilon}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 6y - \frac{3\epsilon}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Comme $D^2\mathcal{L}_{3/(2\sqrt{2})}(E) = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, on a $rt - s^2 = \frac{9}{2} > 0$ et $r = t = \frac{3}{\sqrt{2}} > 0$, donc f_3 réalise en E un minimum local sous la contrainte.

De même, $D^2\mathcal{L}_{-3/(2\sqrt{2})}(F) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, avec $rt - s^2 = \frac{9}{2} > 0$ et $r = t = -\frac{3}{\sqrt{2}} > 0$, donc f_3 réalise en F un maximum local sous la contrainte.

Étude de f_4

Les fonctions f_4 et g_4 sont des polynômes donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. On peut montrer que g_4 décrit un ensemble compact mais ce n'est pas évident de montrer qu'il est borné. Nous allons raisonner autrement.

➤ *Recherche des points critiques de seconde espèce :* on résout le système

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \\ x^2 + xy + y^2 + y = \frac{13}{9}. \end{cases}$$

La première équation donne $y = -2x$, que l'on reporte dans la deuxième pour trouver que $x = 1/3$ puis que $y = -2/3$. Le couple $(1/3, -2/3)$ ne vérifie pas la troisième équation donc il n'y pas de point critique de seconde espèce.

➤ *Recherche des points critiques de première espèce :* on résout le système

$$\begin{cases} 1 = \lambda\,(2x+y) \\ 2 = \lambda\,(x+2y+1) \\ x^2+xy+y^2+y = \frac{13}{9}. \end{cases}$$

Comme $\lambda = 0$ n'est pas solution du système, on peut diviser par λ. Si on soustrait deux fois la première équation à la deuxième, on trouve que $x = \frac{1}{3}$, puis on reporte dans la première pour obtenir que $y = \frac{1}{\lambda} - \frac{2}{3}$. On reporte ce couple dans la troisième équation pour trouver que $\frac{1}{\lambda^2} = \frac{16}{9}$, donc $\lambda = \pm\frac{3}{4}$. Finalement on trouve le point $A = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ avec $\lambda_A = \frac{3}{4}$ et $B = (\frac{1}{3}, -2)$ avec $\lambda_B = -\frac{3}{4}$.

➤ *Étude des points critiques de première espèce :* Le lagrangien au point A vaut

$$\mathcal{L}_{3/4}(x,y) = x + 2y - \frac{3}{4}(x^2+xy+y^2+y-\frac{13}{9}).$$

C'est un polynôme de second degré dont la matrice hessienne est constante et vaut en tout point $D^2\mathcal{L}_{3/4}(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Or $rt - s^2 = \frac{9}{4} - \frac{9}{16} > 0$ avec $r = t = -\frac{3}{2} < 0$, donc $\mathcal{L}_A$ est une fonction concave sur $\mathbb{R}^2$. On en déduit que f_4 réalise en A le maximum global sous la contrainte. Dans le lagrangien $\mathcal{L}_{-3/4}$ de B, seul le coefficient devant les termes de second degré change de signe (les termes du premier degré ne jouent aucun rôle car ils s'annulent dans la matrice hessienne), donc $\mathcal{L}_B$ est convexe. Ainsi f_4 réalise en B le minimum global sous la contrainte.

Étude de f_5

La fonction g_5 est un polynôme donc une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. La fonction f_5 est définie sur l'ensemble $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y > 0\}$. Il s'agit du demi-plan ouvert délimité par la droite d'équation $x = y$ et qui contient le point $(1,0)$. En particulier, c'est un ensemble convexe. Le sous-ensemble défini par la contrainte est donc l'intersection du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 2 avec ce demi-plan. C'est un demi-cercle *ouvert* qui ne contient pas ses extrémités ; ce n'est pas un compact ! f_5 est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$: la fonction affine $(x,y) \mapsto x - y$ qui est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, donc sur $\mathcal{D}$. Sur $\mathcal{D}$ elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. Or la fonction logarithme est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc f_5 est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ par composition. Comme pour un cercle complet, il n'y a pas de point critique de seconde espèce.

▸ *Recherche des points critiques de première espèce :* on résout le système

$$\begin{cases} \frac{1}{x-y} = 2\lambda x \\ -\frac{1}{x-y} = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 2 \\ x - y > 0. \end{cases}$$

On ajoutant les deux premières équations on trouve que $y = -x$ puisque forcément $\lambda \neq 0$. En reportant dans la troisième équation on a donc $x^2 = 1$ donc $x = \pm 1$. Or le point $(-1, 1)$ n'est pas dans $\mathcal{D}$, donc il n'y a qu'un point critique $(1, -1)$. La première équation donne alors $\lambda = \frac{1}{4}$.

▸ *Étude du point critique de première espèce.*

Le lagrangien vaut $\mathcal{L}_{1/4}(x, y) = \ln(x-y) - \frac{1}{4}(x^2 + y^2 - 2)$. C'est une fonction concave sur l'ensemble $\mathcal{D}$ convexe. En effet, la fonction $(x, y) \mapsto \ln(x-y)$ est une fonction concave, car le logarithme est une fonction concave sur $\mathcal{R}^{+*}$, et on le compose avec une fonction affine qui prend des valeurs positives strictement sur $\mathcal{D}$. La fonction $x \mapsto -\frac{1}{4}x^2$ est une fonction concave sur $\mathbb{R}$, donc par le lemme d'extension $(x, y) \mapsto -\frac{1}{4}x^2$ est une fonction concave sur $\mathbb{R}^2$, donc sur $\mathcal{D}$. De même, la fonction $(x, y) \mapsto -\frac{1}{4}y^2$ est une fonction concave sur $\mathcal{D}$. Finalement, $\mathcal{L}_{1/4}$ est une fonction concave sur $\mathcal{D}$ comme somme de fonctions concaves sur $\mathcal{D}$. Donc, f_5 réalise en $(1, -1)$ un maximum global sous la contrainte.

Étude de f_6

Les fonctions f_6 et g_6 sont des polynômes donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

▸ *Recherche des points critiques de seconde espèce :* on résout le système

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = 0 \\ -\frac{y}{8} = 0 \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1. \end{cases}$$

Les deux premières équations sont équivalentes à $x = y = 0$, qui ne vérifie pas la contrainte, donc il n'y pas de point critique de seconde espèce.

▸ *Recherche des points critiques de première espèce :* on résout le système

$$\begin{cases} 2x = \lambda \frac{x}{2} \\ 2y = -\lambda \frac{y}{8} \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1. \end{cases}$$

La première équation est équivalente à $2x\,(1-\frac{\lambda}{4})=0$. On a donc soit $x=0$, soit $\lambda=4$.
Si $x=0$, la troisième équation donne $-\frac{y^2}{16}=1$, qui est impossible. Donc $\lambda=4$. La deuxième équation donne alors que $2y=-\frac{y}{2}$, donc forcément $y=0$. Finalement, la troisième équation donne $\frac{x^2}{4}=1$, donc $x=\pm 2$. On trouve ainsi deux points critiques $A=(2,0)$ et $B=(-2,0)$ avec $\lambda_A=\lambda_B=4$.

➤ *Étude des points critiques de première espèce :* On forme le lagrangien $\mathcal{L}_4(x,y)=x^2+y^2-4\,(\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}-1)=\frac{5}{4}\,y^2+4$. Grâce au lemme d'extension, le lagrangien est une fonction convexe sur $\mathbb{R}^2$. Donc f_6 réalise en A et B un maximum global sous la contrainte.
On remarque que cela est cohérent car $f_6(A)=f_6(B)$.

Étude de f_7

Les fonctions f_7 et g_7 sont des polynômes donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

➤ *Recherche des points critiques de seconde espèce :* on résout le système

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ x-2y=0 \\ x^2+xy-y^2=1. \end{cases}$$

Les deux premières équations admettent $(0,0)$ comme unique solution. Ce point ne vérifie pas la contrainte, donc il n'y a pas de point critique de seconde espèce.

➤ *Recherche des points critiques de première espèce :* on résout le système

$$\begin{cases} 2=\lambda\,(2x+y) \\ 1=\lambda\,(x-2y) \\ x^2+xy-y^2=1. \end{cases}$$

On remarque que $\lambda=0$ n'est pas solution du système. En soustrayant deux fois la deuxième équation à la première, on trouve que $5\,\lambda\,y=0$, donc soit $\lambda=0$, qui est impossible, soit $y=0$. Si $y=0$, en reportant dans la troisième équation on trouve que $x^2=1$ donc $x=1$ ou $x=-1$. On obtient donc deux points critiques $A=(1,0)$ et $B=(-1,0)$. En reportant dans la deuxième équation, on obtient les multiplicateurs de Lagrange associés, $\lambda_A=1$ et $\lambda_B=-1$.

➤ *Étude des points critiques de première espèce :* le lagrangien vaut

$$\mathcal{L}_\lambda(x,y)=2x+y-\lambda\,(x^2+xy-y^2-1).$$

C'est un polynôme de degré 2, dont la matrice hessienne est constante en tout point et vaut $D^2\mathcal{L}_\lambda(x,y)=\begin{pmatrix}-2\lambda & -\lambda \\ -\lambda & +2\lambda\end{pmatrix}$. Or, dans les deux cas, $rt-s^2=-5\lambda^2<0$ car

$\lambda = \pm 1$. Ainsi A et B sont des points selle du lagrangien. On linéarise la contrainte. Comme $\nabla g_7(A) = (2,1)$ et $\nabla g_7(B) = -(2,1)$, la linéarisation de la contrainte s'écrit dans les deux cas $k = -2h$. La forme quadratique associée à la matrice hessienne du lagrangien au point A s'écrit $d^2\mathcal{L}_1(h,k) = 2(-h^2 - hk + k^2)$. Donc $d^2\mathcal{L}_1(h,-2h) = 10h^2 \geqslant 0$, donc f_7 réalise en A un minimum local sous la contrainte. On observe que $D^2\mathcal{L}_{-1}(x,y) = -D^2\mathcal{L}_1(x,y)$, donc le même argument donne le signe opposé pour B dans la forme quadratique. Autrement dit, f_7 réalise en B un maximum local, sous la contrainte.

Étude de f_8

Le domaine de définition est $\mathcal{D}_{f_8} = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est une fonction usuelle, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$, donc par le lemme d'extension $(x,y) \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ donc sur $\mathcal{D}_{f_8}$. Par le même argument, $(x,y) \mapsto \frac{1}{y}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_{f_8}$. Par somme, f_8 est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_{f_8}$. De même, g_8 est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_{f_8}$.

➤ *Recherche des points critiques de seconde espèce :* $\nabla g_8(x,y) = (-2x^{-3}, -2y^{-3})$ ne s'annule pas sur $\mathcal{D}_{f_8}$, donc il n'y a de point critique de seconde espèce.

➤ *Recherche des points critiques de première espèce :* on résout le système

$$\begin{cases} -\frac{1}{x^2} = -\frac{2\lambda}{x^3} \\ -\frac{1}{y^2} = -\frac{2\lambda}{y^3} \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2} \\ x \neq 0,\ y \neq 0. \end{cases}$$

Les deux premières équations sont équivalentes à $x = y = 2\lambda$ avec $\lambda \neq 0$. On reporte dans la troisième équation pour obtenir $\frac{1}{2\lambda^2} = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $\lambda^2 = 1$, soit encore $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$. Ainsi on a trouvé deux points $A = (2,2)$ avec $\lambda_A = 1$ et $B = (-2,-2)$ avec $\lambda_B = -1$.

➤ *Étude des points critiques de première espèce :* en chaque point critique, le lagrangien s'écrit $\mathcal{L}_\lambda(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \lambda\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{2}\right)$. La matrice hessienne du lagrangien est donnée par

$$D^2\mathcal{L}_\lambda(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} - \lambda\frac{6}{x^4} & 0 \\ 0 & \frac{2}{y^3} - \lambda\frac{6}{y^4} \end{pmatrix}.$$

Donc aux deux points critiques, nous obtenons

$$D^2\mathcal{L}_1(2,2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}, \quad D^2\mathcal{L}_-1(-2,-2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Au point A, $rt - s^2 = \frac{1}{64} > 0$ avec $r = t = -\frac{1}{8} < 0$ donc f_8 réalise en A un maximum local sous contrainte. Au point B, $rt - s^2 = \frac{1}{64} > 0$ avec $r = t = +\frac{1}{8} > 0$ donc f_8 réalise en B un minimum local.

`Méthode alternative par changement de variables :` on pose $X = \frac{1}{x}$ et $Y = \frac{1}{y}$, donc le problème précédent revient à optimiser la fonction $F_8(X, Y) = X + Y$ sous la contrainte $X^2 + Y^2 = \frac{1}{2}$ et avec $X \neq 0$ et $Y \neq 0$. La contrainte définit donc le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$ privé de ses intersections avec les axes, c'est-à-dire privé des points $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ et $(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$. En particulier la contrainte n'est pas un compact ! Il n'y a pas de point critique de seconde espèce. Pour les points critiques de première espèce, le système s'écrit :

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda X \\ 1 = 2\lambda Y \\ X^2 + Y^2 = \frac{1}{2} \\ X \neq 0,\ Y \neq 0. \end{cases}$$

En raisonnant comme pour la méthode précédente, on trouve les points $A' = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ avec $\lambda_{A'} = 1$ et $B' = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ avec $\lambda_{B'} = -1$. Les lagrangiens respectifs sont

$$\mathcal{L}_1(x, y) = X + Y - X^2 - Y^2 + \frac{1}{2} \text{ et } \mathcal{L}_{-1}(x, y) = X + Y + X^2 + Y^2 - \frac{1}{2}.$$

Il est facile de montrer que $\mathcal{L}_1$ est concave sur $\mathbb{R}^2$ et que $\mathcal{L}_{-1}$ est convexe sur $\mathbb{R}^2$. Mais nous nous intéressons à ces lagrangiens sur le domaine $\mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}^\star$ qui n'est pas convexe. On peut en revanche dire que $\mathcal{L}_1$ est localement concave au voisinage de A' et donc que A' est un maximum local, et $\mathcal{L}_{-1}$ est localement convexe au voisinage de B' et donc que B' est un minimum local. En faisant le changement de variables inverse, on retrouve les points A et B pour le problème initial et leur nature.

Étude de f_9

Les fonctions f_9 et g_9 sont des polynômes, donc des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. La contrainte est le cercle de centre $(1, -1)$ et de rayon $2\sqrt{2}$. Un cercle est un ensemble compact, donc f_9 admet un minimum global et un maximum global sous la contrainte. En outre, il n'y pas de point critique de seconde espèce.

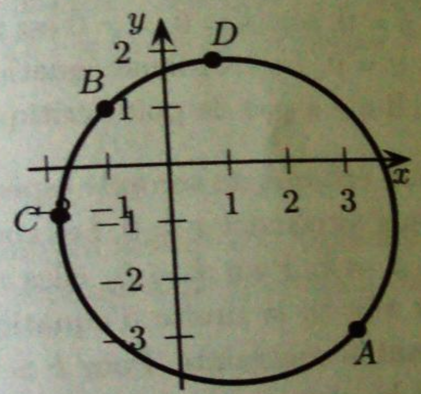
➤ *Recherche des points critiques de première espèce :* on résout le système

$$\begin{cases} 2x - 2(y - x) = 2\lambda(x - 1) \\ 2y + 2(y - x) = 2\lambda(y + 1) \\ x^2 + y^2 + 2y - 2x - 6 = 0. \end{cases}$$

En ajoutant la deuxième équation à la première, on obtient $(x+y)(1-\lambda)=0$, d'où l'alternative $y=-x$ ou $\lambda=1$. Si $y=-x$, en reportant dans la troisième équation, on obtient $2x^2-4x-6=0$, qui admet deux solutions 3 et -1. On trouve donc deux points : $A=(3,-3)$ et $B=(-1,1)$. On obtient les multiplicateurs associés en reportant dans la première équation, par exemple, soit $\lambda_A=\frac{9}{2}$ et $\lambda_B=\frac{3}{2}$. Si $\lambda=1$, en reportant dans la première équation, on trouve que $y=x+1$. On reporte cette relation dans la troisième équation pour obtenir $2x^2+2x-3=0$. Ce trinôme admet deux racines $\frac{-1-\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{7}}{2}$. On obtient ainsi deux autres points critiques $C=(\frac{-1-\sqrt{7}}{2},\frac{1-\sqrt{7}}{2})$ et $D(\frac{-1+\sqrt{7}}{2},\frac{1+\sqrt{7}}{2})$ avec $\lambda_C=\lambda_D=1$.

➤ *Étude des points critiques de première espèce :* On sait que la contrainte définie un ensemble compact, comme $f(A)=54$, $f(B)=6$ et $f(C)=f(D)=5$, on en déduit que f_9 atteint son maximum global sous la contrainte au point A et son minimum global sous la contrainte aux points C et D. Il nous reste à déterminer la nature du point B.

`Résolution graphique :` on trace le cercle qui détermine la contrainte, et on place les quatre points critiques sur ce cercle. Le point B se situe entre les points C et D qui réalisent le minimum global, donc B est un maximum local.



`Résolution par la méthode du lagrangien :` au point B le lagrangien vaut

$$\mathcal{L}_{3/2}(x,y)=x^2+y^2+(y-x)^2-\frac{3}{2}(x^2+y^2+2y-2x-6)=$$
$$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2-2xy-3y+3x+9.$$

C'est un polynôme du second degré. Sa matrice hessienne est constante et vaut

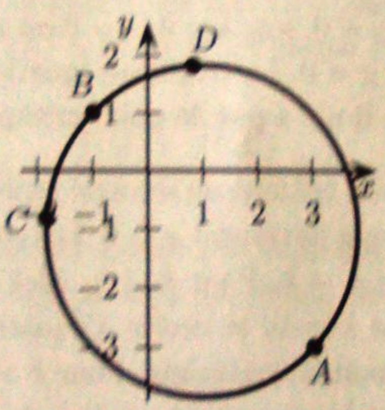
$$D^2\mathcal{L}_{3/2}(x,y)=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Or, $rt-s^2=-3<0$, donc B est un point selle du lagrangien. On linéarise la contrainte : $\nabla g_9(B)=(-4,4)$. La linéarisation donne $-4h+4k=0$, soit $h=k$.
Or, $d^2\mathcal{L}_{3/2}(h,k)=h^2-4hk+k^2$ donc $d^2\mathcal{L}_{3/2}(h,h)=-2h^2\leq 0$, donc f_9 réalise en B un maximum local sous la contrainte.

En ajoutant la deuxième équation à la première, on obtient $(x+y)(1-\lambda)=0$, d'où l'alternative $y=-x$ ou $\lambda=1$. Si $y=-x$, en reportant dans la troisième équation, on obtient $2x^2-4x-6=0$, qui admet deux solutions 3 et -1. On trouve donc deux points : $A=(3,-3)$ et $B=(-1,1)$. On obtient les multiplicateurs associés en reportant dans la première équation, par exemple, soit $\lambda_A=\frac{9}{2}$ et $\lambda_B=\frac{3}{2}$. Si $\lambda=1$, en reportant dans la première équation, on trouve que $y=x+1$. On reporte cette relation dans la troisième équation pour obtenir $2x^2+2x-3=0$. Ce trinôme admet deux racines $\frac{-1-\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{7}}{2}$. On obtient ainsi deux autres points critiques $C=(\frac{-1-\sqrt{7}}{2},\frac{1-\sqrt{7}}{2})$ et $D(\frac{-1+\sqrt{7}}{2},\frac{1+\sqrt{7}}{2})$ avec $\lambda_C=\lambda_D=1$.

➤ *Étude des points critiques de première espèce :* On sait que la contrainte définie un ensemble compact, comme $f(A)=54$, $f(B)=6$ et $f(C)=f(D)=5$, on en déduit que f_9 atteint son maximum global sous la contrainte au point A et son minimum global sous la contrainte aux points C et D. Il nous reste à déterminer la nature du point B.

`Résolution graphique` : on trace le cercle qui détermine la contrainte, et on place les quatre points critiques sur ce cercle. Le point B se situe entre les points C et D qui réalisent le minimum global, donc B est un maximum local.



`Résolution par la méthode du lagrangien` : au point B le lagrangien vaut

$$\mathcal{L}_{3/2}(x,y)=x^2+y^2+(y-x)^2-\frac{3}{2}(x^2+y^2+2y-2x-6)=$$
$$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2-2xy-3y+3x+9.$$

C'est un polynôme du second degré. Sa matrice hessienne est constante et vaut

$$D^2\mathcal{L}_{3/2}(x,y)=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Or, $rt-s^2=-3<0$, donc B est un point selle du lagrangien. On linéarise la contrainte : $\nabla g_9(B)=(-4,4)$. La linéarisation donne $-4h+4k=0$, soit $h=k$.
Or, $d^2\mathcal{L}_{3/2}(h,k)=h^2-4hk+k^2$ donc $d^2\mathcal{L}_{3/2}(h,h)=-2h^2\leqslant 0$, donc f_9 réalise en B un maximum local sous la contrainte.