Correction exo1.68

1. f est une fonction polynôme, de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Par le lemme d'extension, g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

a) `En explicitant la contrainte` $g(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$. On remarque d'abord que

$$\begin{cases} x^{-1} + y^{-1} = \frac{2}{3} \\ (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3x\,(2x-3)^{-1} \\ x \notin \{0, 3/2\}. \end{cases}$$

On pose $\varphi(x) = f\big(x, 3x\,(2x-3)^{-1}\big) = 3x^2\,(2x-3)^{-1}$. On est ramené à optimiser φ sans contrainte sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 3/2\}$. Or, $\varphi'(x) = 6x\,(x-3)\,(2x-3)^{-2}$. Donc, $\varphi'(x) = 0$ si, et seulement si, $x = 3$. De plus, $\varphi''(x) = (-12x - 18)\,(2x-3)^{-3}$. Donc, $\varphi''(3) = -2 < 0$. Le point 3 donne donc un maximum local de φ, la valeur de y correspondante est 3. Donc, f réalise sous la contrainte $g(x,y) = 0$ un maximum local de valeur 9. Ce maximum n'est pas global car $\lim_{x \to (3/2)^+} \varphi(x) = +\infty$.

`Par la méthode du lagrangien.` On a $\nabla g(x,y) = (-x^{-2}, -y^{-2})$ n'est jamais nul, donc il n'y a pas de point critique de seconde espèce. Les points critiques de première espèce vérifient le système :

$$\begin{cases} y = -\lambda\, x^{-2} \\ x = -\lambda\, y^{-2} \\ x^{-1} + y^{-1} = 2/3 \\ (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \end{cases}$$

En reportant l'expression de y, donnée par la première équation, dans la deuxième et en remarquant que $\lambda \neq 0$ puisque $x \neq 0$, on trouve $x\,(\lambda + x^3) = 0$. Puisque $x \neq 0$, on a $x^3 = -\lambda$, puis forcément $y^3 = -\lambda$. En particulier, $x = y$, et en reportant dans la troisième équation, on identifie $x = y = 3$, puis $\lambda = -27$. Le lagrangien vaut donc

$\mathcal{L}_{-27}(x,y) = xy + 27(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{3})$. On trouve

$$D^2\mathcal{L}_{-27}(x,y) = \begin{pmatrix} 54/x^3 & 1 \\ 1 & 54/y^3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D^2\mathcal{L}_{-27}(3,3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Or, $rt - s^2 = 3 > 0$ et $r = t = 2 > 0$, donc f réalise en $(3,3)$ un minimum local sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

Remarque.— On aurait aussi pu faire le changement de variables $X = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}^*$ *et* $Y = \frac{1}{y} \in \mathbb{R}^*$, *et chercher les extrema de la fonction* $\tilde{f}(X,Y) = \frac{1}{XY}$ *sous la contrainte linéaire* $X + Y = 2/3$.

b) `En explicitant la contrainte` $f(x,y) = xy = 9$: la contrainte est équivalente à $y = 9/(x)$ avec $x \in \mathbb{R}^*$. On reporte dans l'expression de g, et on est ramené à optimiser la fonction $\psi(x) = g\left(x, \frac{9}{x}\right) = \frac{9+x^2}{9x}$ sur $\mathbb{R}^*$. Cette fonction est impaire. Or, $\psi'(x) = \frac{x^2-9}{9x^2}$ s'annule en 3 et -3. À l'aide d'un tableau de variations, on voit que ψ admet un minimum local en 3 de valeur $2/3$ et un maximum local en -3 de valeur $-2/3$. Ces extrema ne sont pas globaux car $\lim_{x\to 0^+} \psi(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^-} \psi(x) = -\infty$ (mais aussi, parce que la valeur du maximum local est inférieure à celle du minimum local !). Pour le problème original, on obtient que g réalise au point $(3,3)$ un minimum local de valeur $2/3$ sous la contrainte $xy = 9$ et qu'au point $(-3,-3)$, g réalise un maximum local de valeur $-2/3$, sous contrainte $xy = 9$.

`Par la méthode du lagrangien :`

➤*Recherche des points critiques de seconde espèce :* on trouve que $\nabla f(x,y) = (y,x)$ qui s'annule seulement en $(0,0)$, mais ce point ne satisfait pas la contrainte. Donc il n'y a pas de point critique de seconde espèce.

➤*Recherche des points critiques de première espèce :* pour trouver les points critiques de première espèce, on résout le système :

$$\begin{cases} -\frac{1}{x^2} - \lambda y = 0 \\ -\frac{1}{y^2} - \lambda x = 0 \\ xy = 9, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*. \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{x}{x^2} - \lambda xy = 0 \\ -\frac{y}{y^2} - \lambda yx = 0 \\ xy = 9, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*. \end{cases}$$

L'équivalence entre les deux systèmes est vraie car $x \neq 0$ et $y \neq 0$; on peut donc multiplier la première équation par x et la deuxième par y dans le premier système. En soustrayant les deux premières équations du second système, on en déduit que $x = y$, puis, en reportant dans la deuxième, que $\frac{1}{\lambda} = -x^3 = -y^3$. En reportant dans la troisième, on obtient que $x^2 = 9$, donc $x = y = 3$ ou $x = y = -3$. On obtient donc deux points critiques : $A = (3,3)$ avec multiplicateur $\lambda_A = -\frac{1}{27}$ et $B = (-3,-3)$ avec multiplicateur $\lambda_B = \frac{1}{27}$. La contrainte ne définit pas un ensemble compact, donc on ne peut pas conclure directement. On forme le lagrangien $\mathcal{L}_\lambda(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \lambda(xy - 9)$, puis la matrice hessienne associée

$$D^2\mathcal{L}_\lambda(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & -\lambda \\ -\lambda & \frac{2}{y^3} \end{pmatrix}.$$

Au point A, on a $\lambda = -\frac{1}{27}$ et donc

$$D^2\mathcal{L}_{-1/27}(A) = \begin{pmatrix} \frac{2}{27} & \frac{1}{27} \\ \frac{1}{27} & \frac{2}{27} \end{pmatrix}.$$

En A, $rt - s^2 > 0$ avec $r = t = \frac{2}{27} > 0$, donc g présente en A un minimum local sous la contrainte $xy = 9$. Pour le point B, on a

$$D^2\mathcal{L}_{1/27}(B) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{27} & -\frac{1}{27} \\ -\frac{1}{27} & -\frac{2}{27} \end{pmatrix}$$

En B, $rt - s^2 > 0$ avec $r = t = -\frac{2}{27} < 0$, donc g présente en B un maximum local sous la contrainte $xy = 9$.

2. `Extrema sans contrainte` : on va montrer, par deux méthodes différentes, que $(0,0)$ est le seul point critique de h et qu'il donne d'un maximum global. Tout d'abord, on voit directement que $h \leqslant 0$ et que $h(0,0) = 0$, donc h atteint son maximum global en $(0,0)$. h n'est pas minorée sur $\mathbb{R}^2$, car $\lim_{x\to+\infty} h(x,0) = \lim_{x\to+\infty}(-x^2) = -\infty$. Donc h n'atteint pas de minimum global sur $\mathbb{R}^2$.
Ensuite, on observe que $\nabla h(x,y) = (-2x, -8y)$, donc $(0,0)$ est le seul point critique. Par le lemme d'extension et par somme de fonctions concaves, h est concave sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto -x^2$ et $y \mapsto -4y^2$ sont concaves sur $\mathbb{R}$. D'où la conclusion sur la nature de $(0,0)$.

`Extrema sous contrainte` : la contrainte $x + 2y^2 - 2 = 0$ définit une parabole horizontale. Ce n'est pas un ensemble borné, donc pas un compact : tous les points de la forme $(2-2n^2, n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ appartiennent à la contrainte, et leurs abscisses et leurs ordonnées tendent vers l'infini avec n.
`En explicitant la contrainte` : la contrainte s'écrit $x = 2 - 2y^2$. On reporte dans l'expression de h. On est ramenés à chercher les extrema sur $\mathbb{R}$ de la fonction $h(2-2y^2, y) = -(2-2y^2)^2 - 4y^2 = 4\left(-y^4 + y^2 - 1\right)$ sur $\mathbb{R}$.
On pose $u(y) = -y^4 + y^2 - 1$, donc $u'(y) = -4y^3 + 2y = -2y(2y^2 - 1)$. La dérivée s'annule en 3 points : 0, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Comme $u''(y) = -12y^2 + 2$, on trouve que $u''(0) = 2 > 0$, $u''(\frac{1}{\sqrt{2}}) = u''(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -4 < 0$. Donc 0 donne un minimum local et les deux autres points donnent des maxima locaux. On a toujours $u(y) \leqslant 0$, donc u est majorée. En revanche, $\lim_{y\to\pm\infty} u(y) = -\infty$, donc u n'est pas minorée, donc le minimum n'est pas global. En faisant un tableau de variations, on voit que les deux autres points donnent le maximum global. Pour le problème initial, on conclut que h

admet un minimum local en $(2,0)$, sous la contrainte $x+2y^2-2=0$ et un maximum global en $(1,\frac{1}{\sqrt{2}})$ et en $(1,-\frac{1}{\sqrt{2}})$, sous la contrainte $x+2y^2-2=0$.

Par la méthode du lagrangien :

➤ *Recherche des points critiques de seconde espèce :* on pose $k(x,y)=x+2y^2-2$, et on résout le système

$$\begin{cases} k(x,y) = x+2y^2-2=0 \\ \nabla k(x,y) = (1,4y) = (0,0). \end{cases}$$

Ce système n'admet pas de solution car le gradient de k n'est jamais nul, donc il n'y a pas de point critique de seconde espèce.

➤ *Recherche des points critiques de première espèce :* on résout le système

$$\begin{cases} -2x = \lambda \\ -8y = 4\lambda\, y \\ x+2y^2-2=0. \end{cases}$$

La deuxième équation est équivalente à $y\,(\lambda+2)=0$, donc soit $y=0$, soit $\lambda=-2$.

Si $y=0$, la troisième équation donne $x=2$, et la première $\lambda=-4$. On trouve un premier point : $A=(2,0)$ avec $\lambda=-4$.

Si $\lambda=-2$, la première équation donne $x=1$ et la troisième $y^2=\frac{1}{2}$, donc $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. On trouve deux autres points $B=(1,\frac{1}{\sqrt{2}})$ et $C=(1,-\frac{1}{\sqrt{2}})$ avec $\lambda_B=\lambda_C=-2$. En A, le lagrangien vaut $\mathcal{L}_{-4}(x,y)=-x^2-4\,y^2+4\,(x+2\,y^2-2)=-x^2+4\,y^2+4\,x-2$.

C'est un polynôme du second degré qui n'est ni convexe ni concave, car sa matrice hessienne vaut $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, donc $rt-s^2=-16<0$. Il faut linéariser la contrainte.

Comme $\nabla k(A)=(1,0)$, on se restreint aux accroissements (h,k) tels que $h=0$. La forme quadratique associée à la matrice hessienne est $d^2\mathcal{L}_{-4}(h,k)=-2\,h^2+8\,k^2$, donc $d^2\mathcal{L}_{-4}(0,k)=8\,k^2\geqslant 0$: A est donc un minimum local.

Les points B et C ont le même lagrangien :

$$\mathcal{L}_{-2}(x,y)=-x^2-4\,y^2+2\,(x+2\,y^2-2)=-x^2+2\,x-4.$$

C'est une fonction concave d'une variable, donc de deux variables grâce au lemme d'extension. On en déduit que B et C sont des maxima globaux du lagrangien. Donc, sous la contrainte, h réalise en B et C un maximum global.