Examen de mathématiques (UV13) septembre 2006

Les documents et calculatrices sont interdits.

La qualité de rédaction et de la présentation entrera pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié. Les quatre exercices sont indépendants.

Exercice 1 (3 points). Déterminer le minimum de la somme des carrés de trois nombres réels dont la somme est égale à 3, c'est-à-dire, déterminer le minimum de $x^2 + y^2 + z^2$ sous la contrainte $x + y + z = 3$. On pourra se ramener à l'étude d'une fonction de deux variables.

Exercice 2 (5 points). On considère la fonction f définie par $f(x, y) = x^4 + 2y^2 - 4axy$ où a est un paramètre réel.

1. Discuter, suivant les valeurs de a , l'existence des points critiques de f .
2. Discuter, suivant les valeurs de a , la nature locale des points critiques de f .

Exercice 3 (12 points). On considère la fonction f définie par

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f . Cet ensemble est-il convexe? On admet que $\mathcal{D}$ est un ensemble ouvert.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ et calculer le gradient de f en chaque point de $\mathcal{D}$.
3. Déterminer l'approximation affine de f au voisinage du point $(1, 2)$.
4. On cherche les extrema de f sur l'ensemble $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathcal{D} : x^2 + y^2 = 2\}$.
 - (a) Montrer qu'il n'existe pas de points critiques de seconde espèce.
 - (b) Montrer que si $(x, y) \in \mathcal{E}$ est un point critique de première espèce tel que $xy \neq 0$, alors $x^4 = y^4$.
 - (c) Déterminer les extrema de f sur $\mathcal{E}$.
5. Déterminer les extrema de f sur $\mathcal{D}$. On pourra étudier le signe de f sur $\mathcal{D}$.
6. Déterminer les extrema de f sur l'ensemble $\mathcal{G} = \{(x, y) \in \mathcal{D} : x^2 + y^2 \leq 2\}$.