
Contrôle continu n° 1 : 23 novembre 2010

Les documents et calculatrices sont interdits. La qualité de la rédaction et de la présentation entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Ne pas oublier pas d'indiquer votre numéro de groupe sur la copie.

Exercice 1 Pour chaque question de ce questionnaire, indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse. Chaque réponse correcte au QCM rapporte 1 point. Pour toute question incorrecte, 1 point sera enlevé.

1. Le complémentaire d'un ensemble convexe est toujours un ensemble convexe.
2. Pour tout réel λ , les vecteurs $(1, \lambda)$ et $(-2\lambda, 2)$ sont orthogonaux.
3. L'équation $x^2 - 2x = 2y - y^2$ est l'équation d'un cercle de rayon 2.
4. Si f est une fonction convexe sur un intervalle de \mathbb{R} , elle admet un minimum global sur cet intervalle.

Exercice 2 Soit la fonction f définie par

$$f(x) = (x - 1)^2 e^{-x}.$$

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur son ensemble de définition, que l'on précisera.
2. Calculer la dérivée première et la dérivée seconde de f .
3. Écrire le développement limité à l'ordre de 2 de f en 0.
4. Écrire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en 0, et préciser la position de la courbe par rapport à la tangente en ce point.
5. Donner l'approximation affine de f en 0 et en déduire une valeur approchée de $0,81 e^{-0,1}$.
6. f admet-elle des extrema sur son ensemble de définition. Si oui, sont-ils globaux? Justifier.
7. Tracer sommairement la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. On placera aussi sur ce graphique la tangente en 0.
8. Calculer l'élasticité de f en tout point.
9. Dans toute cette question, on se place en $x_0 = 2$.
 - (a) On suppose que x augmente de 0,1 à partir de 2. De combien varie f ?
 - (b) On observe que f a diminué de 5%. Quelle variation relative de la variable x a provoqué ce changement (on demande une valeur approchée, exprimée en pourcentage)? Quelle est la nouvelle valeur de x ?

Exercice 3 Représenter graphiquement chacun des ensembles suivants dans un repère orthonormé. Pour chacun des 3 ensembles, on tracera sur le graphique sa frontière, et on précisera, sans justification, s'il est ouvert ou fermé. Enfin, on indiquera, en le justifiant, si l'ensemble est borné ou non, convexe ou non.

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x - 1, \quad y < 1 + x \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid x^2 - 2x \geq 2y - y^2\}$$

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2x - 3 \leq 0 \text{ et } |y - 1| < 1\}.$$