

Devoir Maison

Exercice 1 Soient les fonctions

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad g(x) = \ln(x)\sqrt{1+x}.$$

1. Donner les domaines de définitions de f et g et montrer qu'elles sont chacune de classe C^2 sur leur domaine de définition.
2. Donner les développements limités de f et g à l'ordre 2 au voisinage du point 1.
3. En déduire la limite au point 1 de la fonction suivante

$$h(x) = \frac{2ef(x) - (e^2 + 1)x + 2}{\sqrt{2}(x-1) - g(x)}.$$

4. Donner l'équation des tangentes aux graphes de f et g au point 1. Préciser la position des tangentes par rapport aux graphes au voisinage du point 1.
5. On suppose que $x > 0$ et dans ce cas $f(x)$ représente le coût total de production d'un bien A en fonction de la quantité produite x (x est exprimé en millier d'unités du bien A).
Pour tout $x > 0$, déterminer le coût moyen $f_M(x)$ et le coût marginal $f_m(x)$.
6. On se place au niveau de production $x = 1$. Donner une valeur approchée de la variation relative du coût lorsque l'on augmente la production de 2%.
7. Montrer que le coût de production f est une bijection de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$.
8. Calculer la fonction réciproque de f . (on pourra poser $X = e^x$).
9. Pour tout $x > e$ calculer l'élasticité de fg au point $x : e_{fg}(x)$.

Exercice 2 Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{20x^2 - 18x + 11}{(2x-1)^2(x+3)}.$$

1. Pour tout entier n , donner les dérivées d'ordre n de f et donner les domaines de définition associés.

Indication : On pourra dans un premier temps trouver les réels a et b vérifiant l'égalité suivante

$$f(x) = \frac{a}{(2x-1)^2} + \frac{b}{x+3}.$$

Exercice 3 Soient les ensembles suivants :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x - 1| < 1\}; B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1\};$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1, |y| \leq 1\}; D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\} .$$

1. Représenter ces ensembles.
2. Préciser si ils sont bornés.

NB : Dernier délai le 13 Novembre 2014 (pour les volontaires)