

Exo 65:

$$a) f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3.$$

$$DP = \mathbb{R}^2.$$

f est de C^2 , polynôme de second degré.

Rappel: soit $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + h$.

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix}$$

$$\Delta = 4ac - b^2.$$

Critère:

- Si $4ac - b^2 \geq 0$ ($a > 0, c > 0$) f convexe
- Si $4ac - b^2 \geq 0$ ($a < 0, c < 0$) f concave
- Si $4ac - b^2 < 0$ f ni convexe, ni concave.

$$\text{d'où } a = 1; \quad d = 2$$

$$b = 1; \quad e = 0$$

$$c = 1; \quad h = 3.$$

$$\text{par suite: } 4ac - b^2 = 4 - 1 = 3 > 0.$$
$$\text{et } a > 0, c > 0.$$

d'où f est convexe sur $\mathbb{R}^2$.

$$b) \quad g(x, y) = (x^2 + y^2) + \exp(x^2 + y^2).$$

$$Dg = \mathbb{R}^2,$$

$$g \in C^1 \text{ sur } Dg.$$

d'après le corollaire:

$$a=1$$

$$d=0$$

$$b=0$$

$$e=0$$

$$c=1$$

$$h=0.$$

$$4ac - b^2 = 4 > 0 \quad \text{et} \quad a > 0 \quad \text{et} \quad c > 0.$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{est convexe sur } \mathbb{R}^2.$$

* $\exp x$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.

$$(x, y) \mapsto (x^2 + y^2) \quad \text{convexe sur } \mathbb{R}^2.$$

$$\text{par conséquent } (x, y) \mapsto \exp(x^2 + y^2) \text{ est.}$$

$$\text{convexe sur } \mathbb{R}^2. \quad (\text{Prop. 21.17}).$$

CL: g est convexe sur $\mathbb{R}^2$, $\therefore$ Somme de 2

fonct convexe avec des coefficients $\oplus$.