

Exo 63:

i). $f(x, y) = \sqrt{x} + 3 \ln(y) - 2 \exp(x+y)$

$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } y > 0\}$
 D_f ni ouvert, ni fermé.

Soit $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\}$
 par contre U est ouvert.

f de C^2 sur D_f en particulier sur U .

* $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$, par suite
 d'après l'enc. d'extension concave sur U .

* $y \mapsto \ln(y)$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, par suite
 d'après l'enc. d'extension concave sur U .

$(x, y) \mapsto \exp(x+y)$ est convexe sur U .
 (composé application affine avec fct convexe).
 par suite

$(x, y) \mapsto -\exp(x+y)$ est concave sur U .

CL : f est concave sur U . (somme des fct.
 concaves avec des coeff. ≥ 0).

ii). $g(x, y) = x^2 + y^4$ sur $\mathbb{R}^2$

$D_g = \mathbb{R}^2$

g de C^2 sur $\mathbb{R}^2$

(7/2)

$x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

par suite $(x, y) \mapsto x^2$ convexe sur $\mathbb{R}^2$
(l'axe d'extension).

$y \mapsto y^4$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

par suite $(x, y) \mapsto y^4$ convexe sur $\mathbb{R}^2$.
(l'axe d'extension).

CL: g est ~~de~~ convexe sur $\mathbb{R}^2$ (C. Soc.
de 2 f^{nt} convexe avec coefficient $\oplus$).

iii). $h(x, y) = \sqrt{2x + 3y}$.

$Dh = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 2x + 3y \geq 0\}$.

Dh est fermé.

par contre $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 2x + 3y > 0\}$.

V est ouvert.

$(x, y) \mapsto 2x + 3y$ application affine sur V .
 $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}$.

par suite $h(x, y)$ est concave sur V .