

Étude de f_9

Les fonctions f_9 et g_9 sont des polynômes, donc des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. La contrainte est le cercle de centre $(1, -1)$ et de rayon $2\sqrt{2}$. Un cercle est un ensemble compact, donc f_9 admet un minimum global et un maximum global sous la contrainte. En outre, il n'y a pas de point critique de seconde espèce.

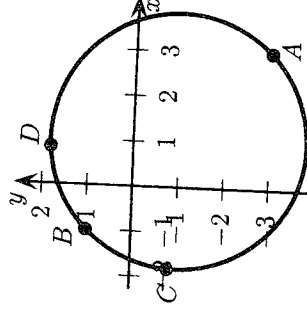
► *Recherche des points critiques de première espèce* : on résout le système

$$\begin{cases} 2x - 2(y - x) = 2\lambda(x - 1) \\ 2y + 2(y - x) = 2\lambda(y + 1) \\ x^2 + y^2 + 2y - 2x - 6 = 0. \end{cases}$$

En ajoutant la deuxième équation à la première, on obtient $(x + y)(1 - \lambda) = 0$, d'où l'alternative $y = -x$ ou $\lambda = 1$. Si $y = -x$, en reportant dans la troisième équation, on obtient $2x^2 - 4x - 6 = 0$, qui admet deux solutions 3 et -1. On trouve donc deux points : $A = (3, -3)$ et $B = (-1, 1)$. On obtient les multiplicateurs associés en reportant dans la première équation, par exemple, soit $\lambda_A = \frac{9}{2}$ et $\lambda_B = \frac{3}{2}$. Si $\lambda = 1$, en reportant dans la première équation, on trouve que $y = x + 1$. On reporte cette relation dans la troisième équation pour obtenir $2x^2 + 2x - 3 = 0$. Ce trinôme admet deux racines $\frac{-1-\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{7}}{2}$. On obtient ainsi deux autres points critiques $C = (\frac{-1-\sqrt{7}}{2}, \frac{1-\sqrt{7}}{2})$ et $D(\frac{-1+\sqrt{7}}{2}, \frac{1+\sqrt{7}}{2})$ avec $\lambda_C = \lambda_D = 1$.

► *Étude des points critiques de première espèce* : On sait que la contrainte définit un ensemble compact, comme $f(A) = 54$, $f(B) = 6$ et $f(C) = f(D) = 5$, on en déduit que f_9 atteint son maximum global sous la contrainte au point A et son minimum global sous la contrainte aux points C et D . Il nous reste à déterminer la nature du point B .

Résolution graphique : on trace le cercle qui détermine la contrainte, et on place les quatre points critiques sur ce cercle. Le point B se situe entre les points C et D qui réalisent le minimum global, donc B est un maximum local.



Résolution par la méthode du lagrangien : au point B le lagrangien vaut

$$\mathcal{L}_{3/2}(x, y) = x^2 + y^2 + (y - x)^2 - \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + 2y - 2x - 6) =$$

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 2xy - 3y + 3x + 9.$$

C'est un polynôme du second degré. Sa matrice hessienne est constante et vaut

$$D^2\mathcal{L}_{3/2}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Or, $rt - s^2 = -3 < 0$, donc B est un point selle du lagrangien. On linéarise la contrainte : $\nabla g_9(B) = (-4, 4)$. La linéarisation donne $-4h + 4k = 0$, soit $h = k$. Or, $d^2\mathcal{L}_{3/2}(h, k) = h^2 - 4hk + k^2$ donc $d^2\mathcal{L}_{3/2}(h, h) = -2h^2 \leq 0$, donc f_9 réalise en B un maximum local sous la contrainte.