

Étude de f_8

Le domaine de définition est $\mathcal{D}_{f_8} = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est une fonction usuelle, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$, donc par le lemme d'extension $(x, y) \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ donc sur $\mathcal{D}_{f_8}$. Par le même argument, $(x, y) \mapsto \frac{1}{y}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_{f_8}$. Par somme, f_8 est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_{f_8}$. De même, g_8 est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_{f_8}$.

► *Recherche des points critiques de seconde espèce* : $\nabla g_8(x, y) = (-2x^{-3}, -2y^{-3})$ ne s'annule pas sur $\mathcal{D}_{f_8}$, donc il n'y a de point critique de seconde espèce.

► *Recherche des points critiques de première espèce* : on résout le système

$$\begin{cases} -\frac{1}{x^2} = -\frac{2\lambda}{x^3} \\ -\frac{1}{y^2} = -\frac{2\lambda}{y^3} \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2} \\ x \neq 0, y \neq 0. \end{cases}$$

Les deux premières équations sont équivalentes à $x = y = 2\lambda$ avec $\lambda \neq 0$. On reporte dans la troisième équation pour obtenir $\frac{1}{2\lambda^2} = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $\lambda^2 = 1$, soit encore $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$. Ainsi on a trouvé deux points $A = (2, 2)$ avec $\lambda_A = 1$ et $B = (-2, -2)$ avec $\lambda_B = -1$.

► *Étude des points critiques de première espèce* : en chaque point critique, le lagrangien s'écrit $\mathcal{L}_\lambda(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \lambda\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{2}\right)$. La matrice hessienne du lagrangien est donnée par

$$D^2\mathcal{L}_\lambda(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} - \lambda\frac{6}{x^4} & 0 \\ 0 & \frac{2}{y^3} - \lambda\frac{6}{y^4} \end{pmatrix}.$$

Donc aux deux points critiques, nous obtenons

$$D^2\mathcal{L}_1(2, 2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}, \quad D^2\mathcal{L}_{-1}(-2, -2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Au point A , $\tau t - s^2 = \frac{1}{64} > 0$ avec $\tau = t = -\frac{1}{8} < 0$ donc f_8 réalise en A un maximum local sous contrainte. Au point B , $\tau t - s^2 = \frac{1}{64} > 0$ avec $\tau = t = +\frac{1}{8} > 0$ donc f_8 réalise en B un minimum local.

Méthode alternative par changement de variables : on pose $X = \frac{1}{x}$ et $Y = \frac{1}{y}$, donc le problème précédent revient à optimiser la fonction $F_8(X, Y) = X + Y$ sous la contrainte $X^2 + Y^2 = \frac{1}{2}$ et avec $X \neq 0$ et $Y \neq 0$. La contrainte définit donc le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$ privé de ses intersections avec les axes, c'est-à-dire privé des points $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ et $(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$. En particulier la contrainte n'est pas un compact ! Il n'y a pas de point critique de seconde espèce. Pour les points critiques de première espèce, le système s'écrit :

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda X \\ 1 = 2\lambda Y \\ X^2 + Y^2 = \frac{1}{2} \\ X \neq 0, Y \neq 0. \end{cases}$$

En raisonnant comme pour la méthode précédente, on trouve les points $A' = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ avec $\lambda_{A'} = 1$ et $B' = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ avec $\lambda_{B'} = -1$. Les lagrangiens respectifs sont

$$\mathcal{L}_1(x, y) = X + Y - X^2 - Y^2 + \frac{1}{2} \text{ et } \mathcal{L}_{-1}(x, y) = X + Y + X^2 + Y^2 - \frac{1}{2}.$$

Il est facile de montrer que $\mathcal{L}_1$ est concave sur $\mathbb{R}^2$ et que $\mathcal{L}_{-1}$ est convexe sur $\mathbb{R}^2$. Mais nous nous intéressons à ces lagrangiens sur le domaine $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ qui n'est pas convexe. On peut en revanche dire que $\mathcal{L}_1$ est localement concave au voisinage de A' et donc que A' est un maximum local, et $\mathcal{L}_{-1}$ est localement convexe au voisinage de B' et donc que B' est un minimum local. En faisant le changement de variables inverse, on retrouve les points A et B pour le problème initial et leur nature.