

Étude de f_6

Les fonctions f_6 et g_6 sont des polynômes donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

► *Recherche des points critiques de seconde espèce* : on résout le système

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = 0 \\ -\frac{y}{8} = 0 \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1. \end{cases}$$

Les deux premières équations sont équivalentes à $x = y = 0$, qui ne vérifie pas la contrainte, donc il n'y a pas de point critique de seconde espèce.

► *Recherche des points critiques de première espèce* : on résout le système

$$\begin{cases} 2x = \lambda \frac{x}{2} \\ 2y = -\lambda \frac{y}{8} \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1. \end{cases}$$

La première équation est équivalente à $2x(1 - \frac{\lambda}{4}) = 0$. On a donc soit $x = 0$, soit $\lambda = 4$.

Si $x = 0$, la troisième équation donne $-\frac{y^2}{16} = 1$, qui est impossible. Donc $\lambda = 4$. La deuxième équation donne alors que $2y = -\frac{y}{2}$, donc forcément $y = 0$. Finalement, la troisième équation donne $\frac{x^2}{4} = 1$, donc $x = \pm 2$. On trouve ainsi deux points critiques $A = (2, 0)$ et $B = (-2, 0)$ avec $\lambda_A = \lambda_B = 4$.

► *Étude des points critiques de première espèce* : On forme le lagrangien $\mathcal{L}_4(x, y) = x^2 + y^2 - 4(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} - 1) = \frac{5}{4}y^2 + 4$. Grâce au lemme d'extension, le lagrangien est une fonction convexe sur $\mathbb{R}^2$. Donc f_6 réalise en A et B un maximum global sous la contrainte. On remarque que cela est cohérent car $f_6(A) = f_6(B)$.