

Étude de f_5

La fonction g_5 est un polynôme donc une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. La fonction f_5 est définie sur l'ensemble $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y > 0\}$. Il s'agit du demi-plan ouvert délimité par la droite d'équation $x = y$ et qui contient le point $(1, 0)$. En particulier, c'est un ensemble convexe. Le sous-ensemble défini par la contrainte est donc l'intersection du cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 2 avec ce demi-plan. C'est un demi-cercle *ouvert* qui ne contient pas ses extrémités; ce n'est pas un compact! f_5 est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$: la fonction affine $(x, y) \mapsto x - y$ qui est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, donc sur $\mathcal{D}$. Sur $\mathcal{D}$ elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^{++}$. Or la fonction logarithme est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{++}$, donc f_5 est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ par composition. Comme pour un cercle complet, il n'y a pas de point critique de seconde espèce.

► *Recherche des points critiques de première espèce* : on résout le système

$$\begin{cases} \frac{1}{x-y} = 2\lambda x \\ -\frac{1}{x-y} = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 2 \\ x - y > 0. \end{cases}$$

On ajoutant les deux premières équations on trouve que $y = -x$ puisque forcément $\lambda \neq 0$. En reportant dans la troisième équation on a donc $x^2 = 1$ donc $x = \pm 1$. Or le point $(-1, 1)$ n'est pas dans $\mathcal{D}$, donc il n'y a qu'un point critique $(1, -1)$. La première équation donne alors $\lambda = \frac{1}{4}$.

► *Étude du point critique de première espèce.*

Le lagrangien vaut $\mathcal{L}_{1/4}(x, y) = \ln(x - y) - \frac{1}{4}(x^2 + y^2 - 2)$. C'est une fonction concave sur l'ensemble $\mathcal{D}$ convexe. En effet, la fonction $(x, y) \mapsto \ln(x - y)$ est une fonction concave, car le logarithme est une fonction concave sur $\mathcal{R}^{++}$, et on le compose avec une fonction affine qui prend des valeurs positives strictement sur $\mathcal{D}$. La fonction $x \mapsto -\frac{1}{4}x^2$ est une fonction concave sur $\mathbb{R}$, donc par le lemme d'extension $(x, y) \mapsto -\frac{1}{4}x^2$ est une fonction concave sur $\mathbb{R}^2$, donc sur $\mathcal{D}$. De même, la fonction $(x, y) \mapsto -\frac{1}{4}y^2$ est une fonction concave sur $\mathcal{D}$. Finalement, $\mathcal{L}_{1/4}$ est une fonction concave sur $\mathcal{D}$ comme somme de fonctions concaves sur $\mathcal{D}$. Donc, f_5 réalise en $(1, -1)$ un maximum global sous la contrainte.