

Étude de f_3

Les fonctions f_3 et g_3 sont des polynômes, donc des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. La contrainte définit le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1, donc c'est un ensemble compact sur lequel f_3 atteint son maximum global et son minimum global.

En outre, d'après la remarque il n'y a pas de point critique de seconde espèce.

► *Recherche des points critiques de première espèce* : on résout le système

$$\begin{cases} 3x^2 = 2\lambda x \\ 3y^2 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

La première équation est équivalente à $x(3x - 2\lambda) = 0$, donc soit $x = 0$, soit $x = \frac{2\lambda}{3}$. De même, la deuxième équation est équivalente à $y(3y - 2\lambda) = 0$, donc soit $y = 0$, soit $y = \frac{2\lambda}{3}$. Si $x = 0$, nécessairement $y = \frac{2\lambda}{3}$, car $(0, 0)$ n'est pas sur le cercle. En reportant dans la troisième équation, on trouve que $\lambda = \pm 3/2$. On a donc deux points $A = (0, 1)$ avec $\lambda_A = 3/2$ et $B = (0, -1)$ avec $\lambda_B = -3/2$. Si $x = \frac{2\lambda}{3}$, on a deux possibilités soit $y = 0$, soit $y = \frac{2\lambda}{3}$. Comme les variables x et y jouent des rôles symétriques dans la fonction et dans la contrainte, dans le cas où $y = 0$ on trouve les points $C = (1, 0)$ avec $\lambda_C = 3/2$ et $D = (-1, 0)$ avec $\lambda_D = -3/2$. Finalement, lorsque $x = y = \frac{2\lambda}{3}$, en reportant dans la troisième équation on trouve que $\frac{8\lambda^2}{9} = 1$, donc $\lambda = \pm \frac{3}{2\sqrt{2}}$. On a les deux points supplémentaires $E = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ avec $\lambda_E = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ et $F = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ avec $\lambda_F = -\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

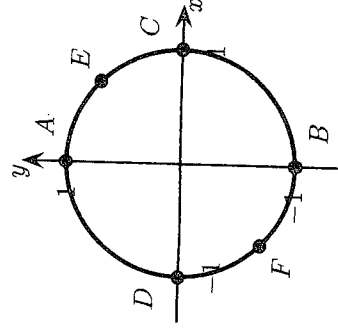
► *Étude des points critiques de première espèce* : la contrainte est un cercle, donc définit un ensemble compact.

continue sur $\mathbb{R}^2$, elle admet un maximum et un minimum global sous contrainte. Comme

$$f_3(A) = f_3(C) = 1, f_3(B) = f_3(D) = -1, f_3(E) = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \text{ et } f_3(F) = -\frac{1}{\sqrt{2}} > -1,$$

on trouve que sous la contrainte, f_3 réalise en A et C le maximum global et en B et D le minimum global.

Il faut faire une étude locale pour les points E et F . Comme le point E se trouve entre les points A et C sur le cercle, et que f_3 réalise en A et C des maxima, la méthode graphique nous dit que f_3 réalise en E un minimum local. De la même manière, comme le point F se trouve entre les points B et D sur le cercle, f_3 réalise sous la contrainte un maximum local en F . Les points critiques sont représentés sur le dessin ci-dessous.



Nous allons valider ces résultats à l'aide de la méthode du lagrangien. Le lagrangien s'écrit $\mathcal{L}_{\frac{3\epsilon}{2\sqrt{2}}}(x, y) = x^3 + y^3 - \frac{3\epsilon}{2\sqrt{2}}(x^2 + y^2 - 1)$, avec $\epsilon = 1$ pour E et $\epsilon = -1$ pour F .

La matrice hessienne est donc $D^2\mathcal{L}_{\frac{3\epsilon}{2\sqrt{2}}}(x, y) = \begin{pmatrix} 6x - \frac{3\epsilon}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 6y - \frac{3\epsilon}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Comme $D^2\mathcal{L}_{3/(2\sqrt{2})}(E) = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, on a $rt - s^2 = \frac{9}{2} > 0$ et $r = t = \frac{3}{\sqrt{2}} > 0$, donc f_3 réalise en E un minimum local sous la contrainte.

De même, $D^2\mathcal{L}_{-3/(2\sqrt{2})}(F) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, avec $rt - s^2 = \frac{9}{2} > 0$ et $r = t = -\frac{3}{\sqrt{2}} > 0$, donc f_3 réalise en F un maximum local sous la contrainte.