

Étude de f_2

Les fonctions f_2 et g_2 sont des polynômes donc des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. En réécrivant la contrainte sous la forme, $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$, on voit qu'il s'agit du cercle de centre $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Comme c'est un cercle il n'y a pas de point critique de seconde espèce

► *Recherche des points critiques de première espèce* : on résout le système

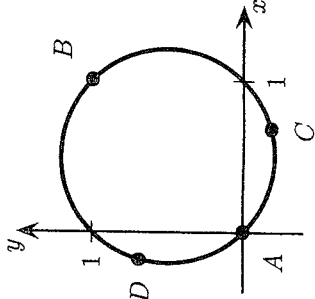
$$\begin{cases} y = \lambda(2x - 1) \\ x = \lambda(2y - 1) \\ x^2 + y^2 - x - y = 0. \end{cases}$$

En soustrayant la deuxième équation à la première, on trouve que la deuxième équation est équivalente à $(1 + 2\lambda)(y - x) = 0$. Donc, soit $\lambda = -\frac{1}{2}$ ou alors $x = y$. Si $x = y$, la troisième équation donne $2x^2 - 2x = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 1$. En utilisant la première équation pour trouver la valeur du multiplicateur, on trouve les deux points $A = (0, 0)$ avec $\lambda_A = 0$ et $B = (1, 1)$ avec $\lambda_B = 1$. Si $\lambda = -\frac{1}{2}$, la première équation donne $y = -x + \frac{1}{2}$. En reportant dans la troisième équation, on arrive à $2x^2 - x - \frac{1}{4} = 0$. Ce trinôme admet deux solutions $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{4}$. On trouve donc deux autres points $C = (\frac{1+\sqrt{3}}{4}, \frac{1-\sqrt{3}}{4})$ et $D = (\frac{1-\sqrt{3}}{4}, \frac{1+\sqrt{3}}{4})$ avec $\lambda_C = \lambda_D = -\frac{1}{2}$.

► *Étude des points critiques de première espèce* : La contrainte définit un cercle, donc un ensemble compact.

puisque f_2 est continue sur $\mathbb{R}^2$, elle admet un maximum et un minimum global sous contrainte. Or, $f_2(A) = 0$, $f_2(B) = 1$, $f_2(C) = f_2(D) = -\frac{1}{8}$, donc f_2 réalise en B le maximum global sous la contrainte, et en C et D , le minimum global sous la contrainte. Il faut faire une étude locale pour le point $(0, 0)$. Le lagrangien en $(0, 0)$ est $\mathcal{L}_0(x, y) = xy$, puisque le multiplicateur est nul. C'est un polynôme du second degré qui n'est ni convexe, ni concave, donc $(0, 0)$ est un point selle du lagrangien. Nous allons montrer de façons différentes que $(0, 0)$ donne un maximum local.

Première méthode. On remarque sur le dessin ci-dessous, que les points du cercle au voisinage de $(0, 0)$ ont des coordonnées de signes différents. Autrement dit, au voisinage de $(0, 0)$ sur le cercle, f_2 prend des valeurs négatives ou nulles. Or, $f(0, 0) = 0$, donc f_2 réalise en $(0, 0)$ un maximum local.



Deuxième méthode. On linéarise la contrainte. La forme quadratique associée à la matrice hessienne au point $(0, 0)$ est $d^2\mathcal{L}_{0(0,0)}(h, k) = hk$, qui change de signe pour (h, k) au voisinage de $(0, 0)$. Comme $\nabla g_2(0, 0) = (-1, -1)$, on restreint l'étude du signe de cette forme quadratique aux couples (h, k) tels que $h + k = 0$, c'est-à-dire $k = -h$. Or, $d^2\mathcal{L}_{0(0,0)}(h, -h) = -h^2 \leq 0$, donc $(0, 0)$ donne bien un maximum local.