

Étude de f_{10}

Les fonctions f_{10} et g_{10} sont des fonctions polynômes donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

► Recherchons les points critiques de seconde espèce. Ces points vérifient la contrainte $g_{10}(x, y) = x^3 - y^2 = 0$ et $\nabla g_{10}(x, y) = (3x^2, -2y) = (0, 0)$. Or, seul le point $(0, 0)$ annule le gradient de g_{10} et $g_{10}(0, 0) = 0$, on en déduit que $(0, 0)$ est un point critique de seconde espèce.

► Recherchons les points critiques de première espèce. Le lagrangien du problème est $\mathcal{L}_\lambda(x, y) = x - \lambda(x^3 - y^2)$. Le système des conditions nécessaires s'écrit :

$$\begin{cases} 1 - 3\lambda x^2 = 0 \\ 2\lambda y = 0 \\ x^3 - y^2 = 0. \end{cases}$$

Par la deuxième équation, soit $y = 0$, soit $\lambda = 0$. $\lambda = 0$ est incompatible avec la première équation, donc on a forcément $y = 0$. La troisième équation donne alors $x = 0$, qui est incompatible avec la première : il n'y a pas de point critique de première espèce.

Le seul point critique est un point critique de seconde espèce. Pour tous les points (x, y) vérifiant la contrainte $x^3 = y^2$ on a forcément $x \geq 0$. Les courbes de niveau k de f_{10} sont les droites verticales d'équation $x = k$. Pour $k < 0$, elles ne rencontrent pas la courbe représentant la contrainte. Pour $k = 0$, la droite d'équation $x = 0$ a un seul point de contact avec la courbe représentant la contrainte. Pour $k > 0$, la droite d'équation $x = k$ rencontre la courbe représentant la contrainte en deux points, en lesquels f_{10} prend la valeur $k > f(0, 0)$. On a donc un minimum global en $(0, 0)$ sous la contrainte.

On a représenté dans le dessin ci-dessous la contrainte $C_0(g)$ ainsi que deux courbes de niveau de f . Celle de niveau 0 (elle se confond avec la droite $x = 0$) a un seul point de contact avec la contrainte et celle de niveau $1/2$ coupe deux fois la contrainte.

