Correction Reste Exo 1.55

b) La fonction g est C^2 sur $\mathbb{R}^2$, on recherche les points critiques. Ils doivent vérifier le système suivant

$$\begin{cases} x^2 - ay = 0 \\ y^2 - ax = 0 \end{cases}$$

Supposons que $a \neq 0$. On obtient alors $y = x^2/a$, le système donne alors $x(x^3 - a^3) = 0$. Donc, soit $x = 0$, soit $x = a$. On a donc deux points critiques $(0,0)$ et (a,a). Calculons la matrice hessienne de g, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$D^2 g(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3a \\ -3a & 6y \end{pmatrix}.$$

Au point $(0,0)$, $rt - s^2 = -9a^2 < 0$, donc $(0,0)$ est un point col. Au point (a,a), on $rt - s^2 = 27a^2 > 0$, et $r = 6a$ donc si $a > 0$, f réalise en (a,a) un minimum local, et si $a < 0$, f réalise en (a,a) un maximum local. Puisque $\lim_{x \to -\infty} g(x,0) = -\infty$ et $\lim_{x\to\infty} g(x,0) = \infty$, g n'admet pas d'extremum global.
Supposons maintenant que $a = 0$. Dans ce cas, on n'a qu'un seul point critique $(0,0)$. C'est un point col car $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, $f(x,y) > 0$ et $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{-*})^2$, $f(x,y) < 0$. Donc, sur n'importe quelle boule autour de $(0,0)$, la fonction g change de signe.

c) La fonction h est C^2 sur $\mathbb{R}^2$, on recherche les points critiques. Ils doivent vérifier le système suivant

$$\begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

Le système donne alors $x = 0$ et $y = -1$ ou $y = -1$. On a donc deux points critiques : $(0,-1)$ et $(0,1)$. Calculons la matrice hessienne de h. Pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$D^2 h(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}.$$

Aux deux points critiques, on a $rt - s^2 = 0$, et la méthode proposée ne peut pas aboutir. En fait, on remarque que h est une fonction à variables séparées : $x \mapsto x^4$ et $y \mapsto y^3 - 3y - 2$. La première fonction admet en 0 un minimum global et la seconde réalise, en $y = -1$, un maximum local et, en $y = 1$, un minimum local. Ainsi, on voit que le point $(0,-1)$ est un point col pour h et que h réalise en $(0,1)$ un minimum local. Ce minimum n'est pas global, puisque $\lim_{x\to-\infty} h(x,0) = -\infty$. On peut aussi raisonner de la façon suivante : au point $(0,-1)$, la forme quadratique associée à la matrice hessienne est $d^2 f_{(0,-1)}(h,k) = -6\,k^2$. Elle est strictement négative pour $k \neq 0$, et nulle sinon. Pour $k \neq 0$, on peut donc conclure, à l'aide du DL d'ordre 2 en $(0,-1)$, que $f(h,-1+k) - f(0,-1) \leqslant 0$ pour (h,k) proche de $(0,0)$. Pour $k = 0$, on a $f(h,-1) - f(0,-1) = h^4 \geqslant 0$. L'accroissement change de signe au voisinage de $(-1,0)$, donc $(0,-1)$ est un point col.

d) La fonction k est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, on recherche les points critiques. Ils doivent vérifier le système suivant

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 - 2xy = 0 \\ 2xy - x^2 - 3y^2 = 0 \end{cases}$$

Si on additionne les deux équations, le système donne $x^2 = y^2$, donc soit $x = y$, soit $x = -y$. Dans les deux cas, on ne trouve qu'un seul point critique $(0, 0)$. Calculons la matrice hessienne de k. Pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$D^2k(x, y) = \begin{pmatrix} 6x - 2y & 2y - 2x \\ 2y - 2x & 2x - 6y \end{pmatrix}.$$

Au point $(0, 0)$, on a $rt - s^2 = 0$, donc on ne peut pas conclure directement. Mais, on observe que $k(x, 0) = x^3$, qui change de signe, ainsi $(0, 0)$ est un point col.