

---

## Contrôle continu n° 1: 27 novembre 2013

La qualité de la rédaction et de la présentation entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Ne pas oublier pas d'indiquer votre numéro de groupe sur la copie.

**Barème indicatif : Ex1 = 5.5 pts, Ex2 = 4 pts, Ex3 = 7.5 pts, Ex4 = 3 pts.**

---

**Exercice 1** Soit la fonction

$$g(x) = \ln(2 - x^2) + \sqrt{2x}$$

- (a) Donner le domaine de définition de  $g$  et montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un intervalle que l'on déterminera.
- (b) Calculer  $g'(x)$  et  $g''(x)$ .
- (c) Ecrire le développement limité de  $g$  à l'ordre 2 au point  $x = 1$ .
- (d) En déduire l'équation de la tangente au point  $(1, g(1))$ . Préciser la position du graphe de  $g$  au voisinage de  $x = 1$ .

**Exercice 2** Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{2}{x} e^{-x^2}.$$

- 1. Calculer l'élasticité de  $f(x)$  pour tout  $x > 0$ .
- 2. Donner une valeur approchée de la variation relative de  $f$  lorsque  $x$  augmente de 5% à partir de 1.
- 3. En partant de  $x_0 = 1$ , de combien faut-il faire varier  $x$  pour que  $f$  augmente de 1% (On demande un calcul approché).
- 4. Calculer l'élasticité de  $f^2(x)$  pour tout  $x > 0$ .

**Exercice 3** Représenter graphiquement chacun des ensembles suivants dans un repère ortho-normé. Pour chacun des 3 ensembles, on tracera sur le graphique sa frontière, et on précisera, sans justification, s'il est ouvert ou fermé. Enfin, on indiquera, en le justifiant, si l'ensemble est borné ou non, convexe ou non.

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x - 1, \quad y < 1 + x \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid x^2 - 2x \geq 2y - y^2\}$$

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2x - 3 \leq 0 \text{ et } |y - 1| < 1\}.$$

**Exercice 4** Soit la fonction

$$f(x, y) = \ln(2 - x^2 - y^2) + \sqrt{2x + 3y}.$$

- (a) Donner et tracer le domaine de définition  $\mathcal{D}_f$  de  $f$ .
- (b) L'ensemble  $\mathcal{D}_f$  est-il convexe, borné? On demande de justifier les réponses.
- (c) Soit  $k$  un réel, donner la définition de la courbe de niveau  $k$  associée à  $f$ .