Université Paris-Dauphine
DEGEAD 1

Année 2013/2014
Prof: BEY M-A

Contrôle continu n° 2: 08 Janvier 2014

La qualité de la rédaction et de la présentation entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Ne pas oublier d'indiquer votre numéro de groupe sur la copie. **Tous les documents et calculatrices sont interdits.** Les deux exercices sont indépendants.
Barème indicatif: Exercice 1 = 9 pts, Exercice 2 = 11 pts.

Exercice 1 On considère la fonction réelle de deux variables f définie par

$$f : (x, y) \mapsto \frac{x^2 + y^2}{x + y}.$$

1. Déterminer et représenter son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. On admet qu'il est ouvert. Est-il convexe ? Justifier votre réponse.
2. Déterminer et représenter (sur le même graphique que pour la question précédente) la courbe de niveau $\mathcal{C}_k$ pour $k = -2$ et $k = 1$.
3. Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_f$ et calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.
4. En déduire une valeur approchée de f au point $(0.9, 1.2)$ et déterminer l'équation de la tangente à la courbe de niveau $\mathcal{C}_1$ au point $(1, 1)$.
5. Trouver les extrema de f sur $\mathcal{D}_f$.
6. Trouver les extrema de f sur le cercle de centre $(-1, -1)$ et rayon $\sqrt{2}$. *On pourra utiliser la question 2.*
7. Etudier la convexité ou la concavité de f sur les ensembles E_1 et E_2 définis par

$$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y > 0\} \quad \text{et} \quad E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y < 0\}.$$

Exercice 2.

Soit f la fonction de deux variables définie par : $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-y}$.

1. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Enoncer le théorème de Schwarz.
3. Calculer les dérivées partielles premières de f et donner son gradient.
4. Calculer les dérivées partielles secondes de f et donner sa matrice hessienne.
5. Trouver les points critiques de f.
6. Déterminer leur nature.
7. Quel est donc le minimum local de f sur $\mathbb{R}^2$? Est-il global ?
8. A partir du déterminant de la matrice hessienne, déterminer si f est localement convexe au voisinage de ses points critiques.

Tournez la page S.V.P.

9. Quel est l'intérêt de faire le DL d'une fonction ?
10. Ecrire le $DL_2(\{1,0\})$ de f en précisant soigneusement les hypothèses.
Identifier les parties approximation affine, forme quadratique et reste.
11. Donner l'équation du plan tangent P à la surface S de f, au point $(1,0,1)$.
12. Quelle est la position relative du plan tangent P par rapport à la surface S ?