Chapitre 18 :

Variation relative :

Définition 1 — Soit f une fonction définie sur un voisinage de $M_0 \in \mathbb{R}^2$ et telle que $f(M_0) \neq 0$. On appelle *variation relative* de la fonction f, lorsque la variable passe de $M_0 = (x_0, y_0)$ à $M_0 + (h, k)$, la valeur du quotient

$$\frac{\Delta f_{M_0}(h,k)}{f(M_0)} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}.$$

La variation relative est définie pour tout couple (h,k) tel que $f(x_0+h, y_0+k)$ est défini.

Définition 2 — Sous les hypothèses de la définition précédente, **si f est strictement positive**, on appelle *élasticité de f par rapport à x* et *élasticité de f par rapport à y* les fonctions $e_{f/x}$ et $e_{f/y}$ définies sur $\mathcal{U}$ par :

$$e_{f/x}(x,y) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{x}{f(x,y)}, \qquad e_{f/y}(x,y) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{y}{f(x,y)}.$$

Application au calcul approché des variations relatives

$$\underbrace{\frac{\Delta f_{(x_0,y_0)}(\Delta x, \Delta y)}{f(x_0,y_0)}}_{\text{Variation relative de } f} \simeq e_{f/x}(x_0,y_0) \underbrace{\frac{\Delta x}{x_0}}_{\text{Variation relative de } x} + e_{f/y}(x_0,y_0) \underbrace{\frac{\Delta y}{y_0}}_{\text{Variation relative de } y}$$

Proposition 1 — *Soit A un réel positif et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Les élasticités de la fonction de Cobb-Douglas $(x,y) \mapsto Ax^\alpha y^\beta$ sont pour tout $x, y > 0$,*

$$e_{f/x}(x,y) = \alpha \text{ et } e_{f/y}(x,y) = \beta.$$

Applications en économie : fonctions marginales

On travaille sur l'ensemble

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y > 0\}.$$

Définition — Soit f une fonction économique (production, coût, utilité, demande ...) dépendant des variables x et y (quantités, prix ...). On suppose que f est de classe C^1 sur $\mathcal{D}$. *Les fonctions marginales* par rapport à x et y sont respectivement les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Interprétation : Soit $M_0 = (x_0, y_0)$ un point où f est définie. En utilisant le corollaire 15.18, on peut écrire, à l'ordre 1 :

$$\Delta f_{M_0}(1, 0) = f(x_0 + 1, y_0 + 0) - f(x_0, y_0) \simeq \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \times 1$$

$$\Delta f_{M_0}(0, 1) = f(x_0 + 0, y_0 + 1) - f(x_0, y_0) \simeq \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \times 1.$$