Chapitre 18 :

Variation relative :

Définition 1 — Soit f une fonction définie sur un voisinage de $M_0 \in \mathbb{R}^2$ et telle que $f(M_0) \neq 0$. On appelle *variation relative* de la fonction f, lorsque la variable passe de $M_0 = (x_0, y_0)$ à $M_0 + (h, k)$, la valeur du quotient

$$\frac{\Delta f_{M_0}(h,k)}{f(M_0)} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{f(x_0, y_0)}.$$

La variation relative est définie pour tout couple (h, k) tel que $f(x_0 + h, y_0 + k)$ est défini.

Définition 2 — Sous les hypothèses de la définition précédente, **si f est strictement positive**, on appelle *élasticité de f par rapport à x* et *élasticité de f par rapport à y* les fonctions $e_{f/x}$ et $e_{f/y}$ définies sur $\mathcal{U}$ par :

$$e_{f/x}(x,y) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{x}{f(x,y)}, \qquad e_{f/y}(x,y) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{y}{f(x,y)}.$$

Application au calcul approché des variations relatives

$$\underbrace{\frac{\Delta f_{(x_0,y_0)}(\Delta x, \Delta y)}{f(x_0,y_0)}}_{\text{Variation relative de } f} \simeq e_{f/x}(x_0,y_0) \underbrace{\frac{\Delta x}{x_0}}_{\text{Variation relative de } x} + e_{f/y}(x_0,y_0) \underbrace{\frac{\Delta y}{y_0}}_{\text{Variation relative de } y}$$

Proposition 1 — *Soit A un réel positif et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Les élasticités de la fonction de Cobb-Douglas $(x,y) \mapsto Ax^\alpha y^\beta$ sont pour tout $x, y > 0$,*

$$e_{f/x}(x,y) = \alpha \text{ et } e_{f/y}(x,y) = \beta.$$

Applications en économie : fonctions marginales

On travaille sur l'ensemble
$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y > 0\}.$$

Définition — Soit f une fonction économique (production, coût, utilité, demande ...) dépendant des variables x et y (quantités, prix ...). On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$. *Les fonctions marginales* par rapport à x et y sont respectivement les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Interprétation : Soit $M_0 = (x_0, y_0)$ un point où f est définie. En utilisant le corollaire 15.18, on peut écrire, à l'ordre 1 :
$$\Delta f_{M_0}(1,0) = f(x_0+1, y_0+0) - f(x_0, y_0) \simeq \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \times 1$$
$$\Delta f_{M_0}(0,1) = f(x_0+0, y_0+1) - f(x_0, y_0) \simeq \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \times 1.$$

Correction Exercice 1.55

(i) Les fonctions f et g sont des fractions rationnelles. Puisque les dénominateurs ne s'annulent pas sur $\mathcal{D}$, elles sont donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.

(ii) On a, pour tous $(p,q) \in \mathcal{D}$,

$$\nabla f(p,q) = \left(-\frac{2000}{p^3 q}, -\frac{1000}{p^2 q^2}\right) \text{ et } \nabla g(p,q) = \left(-\frac{1000}{p^2 q^2}, -\frac{2000}{p q^3}\right),$$

et, d'après la proposition 15.23 page 158,

$$e_{\mathrm{f/p}}(p,q) = -2,\ e_{\mathrm{f/q}}(p,q) = -1,\ e_{\mathrm{g/p}}(p,q) = -1 \text{ et } e_{\mathrm{g/q}}(p,q) = -2.$$

(iii) On veut donc que $\frac{\Delta f_{(p,q)}(\Delta p, 0)}{f(p,q)} = 0.05$. Il faut donc, de façon approximative à l'ordre 1 que $0.05 \simeq e_{\mathrm{f/p}}(p,q)\frac{\Delta p}{p}$. Ainsi il faut que $\frac{\Delta p}{p} \simeq -0.025$, donc que p diminue de 2.5%.
Dans ce cas, puisque à l'ordre 1, $\frac{\Delta g_{(p,q)}(\Delta p,0)}{g(p,q)} \simeq e_{\mathrm{g/p}}(p,q)\frac{\Delta p}{p} = -0.025$.
On a $e_{\mathrm{g/p}}(p,q) = -1$, donc $\frac{\Delta g_{(p,q)}(\Delta p,0)}{g(p,q)} \simeq 0.025$. La demande en bien Y va augmenter de façon approximative, à l'ordre 1, de 2.5%.

(iv) On a

$$\frac{\Delta f_{(p,q)}(\Delta p, \Delta q)}{f(p,q)} \simeq e_{\mathrm{f/p}}(p,q)\frac{\Delta p}{p} + e_{\mathrm{f/q}}(p,q)\frac{\Delta q}{q}, \tag{23.1}$$

d'où $\frac{\Delta f_{(p,q)}(\Delta p,\Delta q)}{f(p,q)} \simeq -0.07$, la demande en bien X diminue approximativement, à l'ordre 1, de 7%. Et, par la même formule appliquée à g, $\frac{\Delta g_{(p,q)}(\Delta p,\Delta q)}{g(p,q)} \simeq 0.01$, la demande en bien Y augmente approximativement, à l'ordre 1, de 1%.

(v) D'après l'équation (23.1), on a le système approximatif suivant

$$\begin{cases} 0.02 = -2(\Delta p)/p - (\Delta q)/q \\ 0 = -(\Delta p)/p - 2(\Delta q)/q \end{cases}$$

Ce système a pour solution $(\Delta p)/p = -0.04/3$ et $(\Delta q)/q = 0.02/3$. Donc p doit approximativement diminuer de 4/3% et q augmenter de 2/3% pour provoquer ce changement.