Université Paris-Dauphine
Département LSO-DEGEAD 1ère année
Denis Pasquignon

UE 15-Année 2014-2015

Outils Mathématiques
Exercices

L'objectif de cette UE est de revoir et de compléter les notions mathématiques acquises au lycée pour donner le bagage minimum d'analyse mathématique nécessaire pour suivre les enseignements des UE de mathématiques, de statistiques et de micro-économie du DUGEAD.

Les calculatrices sont interdites à l'examen.

1 Quantificateurs

Exercice 1.1 (négation d'énoncés avec quantificateurs) Nier, en français courant, les propositions suivantes :

1. Il y a au moins un étudiant qui aime le tennis.
2. Tous les étudiants aiment lire.
3. Dans toutes les matières, il y a au moins un étudiant qui travaille régulièrement.
4. Il y a au moins un étudiant qui, dans toutes les matières, travaille régulièrement .

Exercice 1.2 (compréhension et négation d'implications) Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, et les nier.

1. Pour tout réel x, si $x \geq 3$ alors $x^2 \geq 5$
2. Pour tout entier naturel n, si $n > 1$ alors $n \geq 2$
3. Pour tout réel x, si $x > 1$ alors $x \geq 2$
4. Pour tout réel x, $x^2 \geq 1$ est équivalent à $x \geq 1$ (se rappeler qu'une équivalence est une double implication)

Exercice 1.3 (ordre des quantificateurs, importance de l'ensemble auquel appartiennent les éléments) Les propositions suivantes sont elles vraies ou fausses ?

1. Pour tout entier naturel n, il existe un réel x tel que $x > 2n$
2. Il existe un réel x tel que, pour tout entier naturel n, $x > 2n$
3. Pour tout réel x, pour tout réel y, si $x^2 = y^2$ alors $x = y$.
4. Pour tout réel positif x, pour tout réel positif y, si $x^2 = y^2$ alors $x = y$.

Exercice 1.4 (implications) Donner la réciproque et la contraposée des implications suivantes (x est un réel, n un entier naturel)..

1. Si le père Noël existe alors Noël est en juillet
2. Si $x \geq 3$, alors $x + 2 \geq 5$.
3. Si $n \geq 1$ alors $n^2 > n$.

Exercice 1.5 Montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4 \Rightarrow n! \geq 2^n.$$

Exercice 1.6 (preuve par l'absurde) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer par l'absurde que $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier.

2 Ensembles

Exercice 2.1 Soit A l'ensemble des entiers naturels strictement inférieurs à 10 qui sont pairs. Soit B l'ensemble des entiers naturels strictement inférieurs à 10 qui sont divisibles par 3.

1. Décrire A et B.
2. Donner les éléments de $A \cap B$ et $A \cup B$.
3. Décrire un ensemble C qui soit inclus dans B.
4. Trouver un ensemble D tel que A et D soient disjoints.

Exercice 2.2 Soit E un ensemble, et A une partie de E c'est-à-dire $A \subset E$, on appelle complémentaire de A dans E noté $\overline{A}$ l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A. Montrer que pour toute partie B de E :

$$B = (A \cup B) \cup (\overline{A} \cap B).$$

Exercice 2.3 (ensembles, équivalence) Soient A et B des ensembles. Montrer que

$$A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$$

3 Factorielle

Exercice 3.1 Calculer

1. $$a = \frac{15!}{13!},\ b = \frac{20!}{3!\,5!\,2!},\ c = \frac{600!}{598!\,5!\,2!},\ d = \frac{300!}{3!\,5!\,297!},$$
2. $$e = (4 \times 3)!,\ f = 4! \times 3!,\ g = (4+3)!,\ h = 4! + 3!.$$

Exercice 3.2

1. Simplifier
$$\frac{n!}{(n-1)!}, \frac{(n+1)!}{(n-1)!}, \frac{n!}{(n-2)!}$$
2. Montrer que pour tout entier n et tout $0 \leq k \leq n$, on a
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

4 Limites et Continuité

4.1 Généralités sur les fonctions d'une variable

Exercice 4.1

1. Ecrire l'ensemble $E = \{x \in I\!R \ / \ \sqrt{(x-1)^2} \leq 4\}$ sous forme d'un intervalle.
2. En utilisant l'inégalité stricte évidente : pour tout réel x, $x^2 < x^2 + 1$, montrer que
$$\forall x \in I\!R,\ \ -\sqrt{x^2+1} < x < \sqrt{x^2+1}.$$
3. En déduire que la fonction f donnée par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ est définie sur $I\!R$

Exercice 4.2 *Corrigé sur intercours* On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ et $g(x) = \dfrac{x-3}{x}$.

1. Déterminer les domaines de définition de f et de g.
2. Déterminer les fonctions : $\dfrac{f}{g}$, $f \circ g$, $g \circ f$, ainsi que leurs domaines de définition.

Limites

Exercice 4.3 Représenter graphiquement (sans en donner une définition précise) une fonction f définie sur $]-\infty, -2[\cup]-2, 0[\cup]0, +3[\cup]+3, +\infty[$ vérifiant les 7 propriétés suivantes :

$$\lim_{x\to+3} f(x) = 2, \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1, \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x\to0^-} f(x) = 0,$$
$$\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x\to-2^-} f(x) = -1, \lim_{x\to-2^+} f(x) = +1.$$

Exercice 4.4 Pour chacune des six fonctions définies ci-dessous, préciser le domaine de définition et étudier l'existence d'une limite en a, ou éventuellement l'existence d'une limite à droite ou à gauche de a :

- $f_1(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$ en $a = 1$, $a = -1$, $a = +\infty$
- $f_2(x) = \dfrac{x-|x|}{x}$ en $a = 0$
- $f_3(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ en $a = 1$
- $f_4(x) = \dfrac{x^2+3x-4}{2x^2+5x-7}$ en $a = 1$, $a = +\infty$, $a = -\infty$, $a = -7/2$
- $f_5(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ en $a = +\infty$, $a = -\infty$

Exercice 4.5 *Corrigé sur intercours* $f(x) = \sqrt{4x^2+9} + 2x$, $g(x) = \sqrt{4x^2+9} - 3x$ et $h(x) = \sqrt{4x^2+9} - 2x$.

Déterminer les limites de f, g et h lorsque $x \to +\infty$. Comparer les résultats obtenus pour les deux formes indéterminées.

Exercice 4.6

1. Montrer que la fonction g définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = \ln(x) - 2\sqrt{x}$ est monotone (utiliser la dérivée de g). En déduire que : $\forall x \in [1, +\infty[$, $0 \leq \ln(x) \leq 2\sqrt{x}$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$ puis $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(x)}$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}$ en écrivant x sous forme exponentielle.

Exercice 4.7 Pour chacune des six fonctions définies ci-dessous, déterminer les limites aux points indiqués.

- $f_1(x) = x^x = e^{x\ln x}$ en $a = 0$, $a = +\infty$
- $f_2(x) = x^{1/x} = e^{(\ln x)/x}$ en $a = 0$, $a = +\infty$
- $f_3(x) = 4x^3 + \sqrt{\ln(x)} - e^{4x}$ en $a = +\infty$

- $f_4(x) = \sqrt{x}\,\ln^2(x)$ en $a = 0$.
- $f_5(x) = x^2 e^x$ en $a = -\infty$
- $f_6(x) = x e^{-x^2}$ en $a = +\infty$
- $f_7(x) = \dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$ en $a = +\infty$, $a = -\infty$, $a = 0$

4.2 Continuité

Exercice 4.8

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ 1+x & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Tracer le graphe de f et déterminer $f(\mathbb{R})$. A partir du graphe, f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4.9

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \leq -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Quels sont les points de discontinuité de f ? f est-elle continue à gauche ou à droite en ces points ? Tracer le graphe de f. Déterminer $f(\mathbb{R})$.

Exercice 4.10

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 2] \\ a - b/x & \text{si } x \in]2, 4] \\ 1 & \text{si } x \in]4, +\infty[\end{cases}$$

Déterminer les réels a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$. Tracer le graphe de f.

Exercice 4.11 *Corrigé sur intercours* $f(x) = ||x| - 1|$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ en utilisant les opérations sur les fonctions continues. Ecrire l'expression de $f(x)$ sans valeur absolue et faire une représentation graphique de f.

Exercice 4.12 *Corrigé sur intercours* Montrer que la fonction $f(x) = \dfrac{\ln|x| + x^3 e^x}{x^2 - 1}$ est continue sur son domaine de définition (préciser les fonctions composantes).

Exercice 4.13

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Déterminer $f(\mathbb{R})$ et vérifier que $f(\mathbb{R})$ n'est pas un intervalle.

5 Calcul de dérivées

Exercice 5.1 Après avoir précisé l'ensemble de dérivabilité des fonctions suivantes, déterminer la fonction dérivée :

$$f_1(x) = 3^x x^3, \quad f_2(x) = x\ln(x) - x, \quad f_3(x) = \ln(2x+3),$$
$$f_4(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+e^{2x}}, \quad f_5(x) = \frac{x-1}{x+1}, \quad f_6(x) = \ln(\frac{1}{1+x^2}),$$
$$f_7(x) = e^{-x^2/2}, \quad f_8(x) = (2x^2+1)^{3/2}, \quad f_9(x) = x^x = e^{x\ln(x)},$$
$$f_{10}(x) = \ln(e^x+1), \quad f_{11}(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

Exercice 5.2 En considérant le taux d'accroissement en 0, montrer que la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

Exercice 5.3 En utilisant la notion de taux d'accroissement, déterminer les limites suivantes :

$$a)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x-1}, \quad b)\ \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(x)}, \quad c)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x},$$
$$d)\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}, \text{ en déduire } \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}, \quad \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x,$$
$$e)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, \text{ en déduire } \lim_{x\to-\infty} x(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-1).$$

Exercice 5.4 Soit $k \in I\!R^{+*}$, on définit sur $I\!R$ la fonction g_k par

$$\forall x \in I\!R,\ \ g_k(x) = e^{-kx^2}.$$

1. Etudier la parité de g_k.
2. Montrer que g_k est dérivable et calculer sa dérivée. En déduire le tableau de variation de g_k.
3. Calculer g_k'' et résoudre l'équation $g_k''(x) = 0$.
4. Montrer que pour tous réels h et k strictement positifs
$$h \le k \Longleftrightarrow g_h \ge g_k.$$
5. Tracer la courbe de g_1.

Exercice 5.5 Soit f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1-e^x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{e^x-1}{e^x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ et calculer la valeur de $f'(x)$ dans chaque cas.
2. Montrer que f est continue sur $I\!R$.
3. Etudier le taux de variation de f en 0. La fonction f est-elle dérivable en 0?
4. Déterminer le tableau de variations de f et en déduire que $f(I\!R) = [0,1[$.
5. Soit $y \in]0,1[$. Résoudre l'équation $f(x) = y$ sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$.

6 Fonctions bijectives

Exercice 6.1 Soit $f(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{x^2}$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution $x_0 \in]0, +\infty[$. Encadrer, par tâtonnements, x_0 par deux entiers consécutifs.

Exercice 6.2 On considère la fonction F :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{(x+1)^2}{2} & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1 - \frac{(1-x)^2}{2} & \text{si } x \in]0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On note G la restriction de F à $[-1, 1]$.

1. Calculer la dérivée de F et tracer le graphe de F'.
2. Montrer que G est une bijection de $[-1, 1]$ sur $[0, 1]$.
3. Déterminer $G^{-1}(y)$ pour $y \in [0, 1]$.

Exercice 6.3 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$.

1. Montrer en justifiant les inégalités strictes que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ 0 < g(x) < 1.$$
2. Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.
3. Tracer le graphe de g.
4. Déterminer $g^{-1}(y)$ pour $y \in]0, 1[$.

Exercice 6.4 On considère la fonction f :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.
2. Montrer que f est continue et impaire sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et en déduire que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
4. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f^{-1}(x) = x\,|x|\,.$$
5. Tracer dans le même repère les courbes de f et de f^{-1}.

7 Fonctions convexes ou concaves

Exercice 7.1 1. $f(x) = x\ln(x)$. Montrer que f est convexe sur son domaine de définition. Ecrire l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 1$. En utilisant la convexité de f sur $]0, +\infty[$, quelle inégalité peut-on écrire ?

2. $g(x) = \sqrt{x}$. Montrer que g est concave sur $]0, +\infty[$. Ecrire l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 1$. En utilisant la concavité de g sur $]0, +\infty[$, quelle inégalité peut-on écrire ?

3. Dans les deux cas, tracer le graphe et la tangente.

Exercice 7.2 On pose : $\forall x \in I\!R,\ \phi(x) = x + \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

1. Montrer que ϕ est convexe sur $I\!R$.
2. Résoudre dans $I\!R$ l'équation $\phi'(x) = 0$ en posant $u = e^x$.
3. Ecrire l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = \ln(\sqrt{2} - 1)$. En déduire que ϕ présente un minimum global au point $x = \ln(\sqrt{2} - 1)$.

Exercice 7.3 On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

1. Montrer que la fonction f est strictement croissante et impaire sur $I\!R$.
2. Montrer que f est convexe sur $] - \infty, 0[$ et concave sur $]0, +\infty[$.
3. Ecrire l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$. En déduire que :
$$\forall x < 0,\ f(x) \geq x \text{ et } \forall x > 0,\ f(x) \leq x.$$
4. Montrer que f définit une bijection de $I\!R$ dans $] - 1, 1[$. Déterminer f^{-1}.
5. Tracer le graphe de f.

Exercice 7.4 Une partie de l'examen d'octobre 2011

On considère la fonction f définie par :
$$\forall x > 0,\ \ f(x) = x + \frac{3 + 2\ln(x)}{x},$$
et la fonction g
$$\forall x > 0,\ \ g(x) = x^2 - 2\ln(x) - 1.$$

1. (a) Calculer la dérivée de g.
   (b) Donner le tableau de variations de g.
   (c) Quel est le signe de la fonction g?
2. (a) Justifier que f est de classe C^2 sur $I\!R^{+*}$.
   (b) Déterminer la limite de f quand x tend vers 0^+.
   (c) Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
   (d) Calculer la dérivée de f.
   (e) Donner le tableau de variations de f.
   (f) Sur quel intervalle la fonction f est-elle convexe, concave ?
   (g) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée a. Montrer que $a \in]0, 1[$.
   (h) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $x = 1$.
   (i) Tracer le graphe de f.

8 Calcul d'intégrales

Exercice 8.1 Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^3 x^2 - 3x + 2\,dx, \quad I_2 = \int_1^2 (x - \frac{1}{\sqrt{x}})x^2 dx,$$

$$I_3 = \int_{-1}^2 |x|\,dx, \quad I_4 = \int_1^2 \frac{2x^5 - 3x^2 + \sqrt{x}}{x^{3/2}} dx,$$

$$I_5 = \int_0^1 2^{3x} e^x dx \text{ et } I_6 = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{2}{x^2 - 1} dx,$$

pour I_6, on pourra remarquer que $\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{1+x}$.

Exercice 8.2 Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties.

$$I_1 = \int_1^2 x^\alpha \ln(x) dx, \quad (\alpha \neq -1), \quad I_2 = \int_0^1 x^2 2^x dx.$$

Exercice 8.3 Sachant que la fonction f est C^2 sur $\mathbb{R}$, que $f(1) = 2, f(4) = 7, f'(1) = 5$ et $f'(4) = 3$, calculer l'intégrale $I = \int_1^4 x f''(x) dx$.

Exercice 8.4 Calculer les intégrales en utilisant un changement de variable ou en reconnaissant des dérivées de fonctions composées

$$I_1 = \int_0^1 x e^{-x^2} dx, \quad I_2 = \int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^3} dx, \quad I_3 = \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1 + e^x}} dx,$$

$$I_4 = \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx, \quad I_5 = \int_1^2 \frac{dx}{x(1 + \ln(x))^2}, \quad I_6 = \int_0^1 (1 - x^2)^{5/2} x dx, \quad I_7 = \int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^x} dx.$$

Exercice 8.5 Sachant que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, que l'intégrale $I = \int_0^{36} f(x) dx = 24$, calculer les intégrales $J = \int_0^{12} f(3x) dx$ et $K = \int_0^6 x f(x^2) dx$.

Exercice 8.6 Pour $a > 0$, on considère l'intégrale

$$J(a) = \int_{1/a}^a \frac{\ln(x)}{1 + x^2} dx = \int_{1/a}^a \frac{\ln(x)}{1 + 1/x^2} \frac{dx}{x^2}.$$

En utilisant la deuxième écriture de $J(a)$, effectuer le changement de variable $u = 1/x$ et montrer que $J(a) = -J(a)$. En déduire la valeur de $J(a)$.

9 Intégrale généralisée

Exercice 9.1 étudier la nature des intégrales suivantes et donner leur valeur en cas de convergence :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}, \\ I_2 &= \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx, \text{ (utiliser une intégration par parties sur l'intégrale partielle) }, \\ I_3 &= \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln(x)}}, \text{ (utiliser un changement de variable) }. \end{aligned}$$

Exercice 9.2 Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f(x) = \frac{1}{b-a}$ si $x \in [a, b]$ et 0 sinon. Calculer les intégrales :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx, \;\; I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, \;\; I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$$

et pour tout réel x, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ en discutant selon les valeurs de x.

Exercice 9.3 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1-x & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

1. Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et donner sa valeur.
2. Montrer que, pour tout réel x, l'intégrale $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ converge et donner sa valeur.
3. Montrer que les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$ convergent et donner leurs valeurs.

Variations sur l'intégrale de Gauss

Exercice 9.4

1. On rappelle que

$$G_1 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}/2.$$

En déduire la convergence et la valeur de $G_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx$.

2. On pose

$$\forall x \in I\!R, \;\; \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

(a) Montrer que ϕ est dérivable sur $I\!R$ et calculer sa dérivée.

(b) Calculer $\phi(0)$.

(c) Montrer que

$$\forall x \in I\!R, \;\; \phi(x) + \phi(-x) = 1.$$

10 Révisions : examen octobre 2010

Exercice 10.1 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x + 2 - 2\ln(e^x + 1)$$

et on note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonorrnal.

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout x réel, on a :

   $$f(x) = -x + 2 - 2\ln(e^{-x} + 1)$$

   En déduire que f est paire sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
4. Démontrer que la droite D d'équation : $y = -x+2$ est asymptote à C en $+\infty$. En déduire que C admet une asymptote en $-\infty$ dont on donnera l'équation.
5. Donner le tableau de variations de f.
6. Déterminer la solution, notée α , de l'équation $f(x) = x$.
7. Montrer que f est concave sur $\mathbb{R}$.
8. Tracer le graphe de f avec ses asymptotes.

Exercice 10.2 On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(1-x)^2} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[\\ 0 & \text{si } x \notin [0, 1[\end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. La fonction f est-elle dérivable en $x = \frac{1}{2}$?
3. Tracer le graphe de f.
4. Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et donner sa valeur.
5. Pour tout réel x, on pose $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Déterminer $F(x)$.

Exercice 10.3 Soit pour n entier

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1 + x)dx.$$

1. Calculer I_0.
2. En utilisant une intégration par parties montrer que

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \ I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx.$$

3. Montrer que

   $$\forall x \in [0, 1],\ \ \frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}.$$

4. En déduire I_1.

Exercice 10.4 On pose

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx, \quad J = \int_0^{+\infty} \left| \frac{\ln(x)}{1+x^2} \right| dx \text{ et } K = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$$

On admet que I est convergente.

1. Grâce au changement de variable $u = \frac{1}{x}$, montrer que
$$I = -\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1+u^2} du.$$
2. En déduire que J converge et que $J = 2\,I$
3. En déduire que K converge et que $K = 0$