Université Paris-Dauphine
Département LSO
DEGEAD 1ère année

UE 15 Outils mathématiques

Examen septembre 2011

1heure 30

Les calculatrices, les téléphones portables et tous les documents sont interdits.
Il sera tenu compte de la présentation, de la lisibilité et de la rédaction. Tous les calculs doivent figurer sur la copie : un résultat exact, mais non justifié sera considéré comme nul.

Exercice 1 On considère l'application f défini sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 - x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

et on note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonorrnal.

1. (a) Justifier que f est continue en 0.
   (b) Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
2. (a) Calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   (b) Déterminer la limite de f' quand x tend vers 0.
   (c) En calculant le taux d'accroissement de f en 0, montrer que f est dérivable à droite en 0 et calculer $f'(0)$.
   (d) Donner le tableau de variations de f.
3. (a) Montrer qu'il existe un unique réel noté α tel que $f(\alpha) = 0$.
   (b) Montrer que $1 < \alpha < 2$.
4. Déterminer l'intervalle sur lequel f est concave et celui sur lequel f est convexe.
5. Donner une allure du graphe de f .

Exercice 2 Soit pour a réel

$$I(a) = \int_0^a (1+3x^2)\ln(1+x^2)dx.$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction

$$f(x) = (1+3x^2)\ln(1+x^2).$$

2. (a) L'intégrale $I(a)$ est-elle une intégrale généralisée?
   (b) Pour tout réel a, comparer $I(a)$ et $I(-a)$.
   (c) En utilisant une intégration par parties, calculer $I(a)$ en fonction de a.
   (d) Montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} (1+3x^2)\ln(1+x^2)dx \text{ est divergente.}$$

3. Calculer en fonction de $I(1)$ et de $I(2)$ l'intégrale

$$J = \int_1^4 \frac{(1+3u)\ln(1+u)}{\sqrt{u}}du$$

on pourra utiliser un changement de variable.