Université Paris-Dauphine
Département LSO
DEGEAD 1ère année

UE 15 Outils mathématiques

Examen du 13 octobre 2012

1heure 30

Les calculatrices, les téléphones portables et tous les documents sont interdits.
Vous marquerez votre numéro de TD sur la copie dans l'espace prévu à cet effet.

Il sera tenu compte de la présentation, de la lisibilité et de la rédaction. Tous les calculs doivent figurer sur la copie : un résultat exact, mais non justifié sera considéré comme nul.

On considère la fonction f définie sur le domaine D par :

$$\forall x \in D, \quad f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

1. Quel est le domaine de définition D de la fonction f.

   On admet que f est C^2 sur D.

2. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x + \sqrt{x^2+1})(-x + \sqrt{x^2+1}) = 1.$$

   En déduire que la fonction f est impaire sur son domaine D c'est-à-dire

$$\forall x \in D, \quad f(x) + f(-x) = 0.$$

3. Calculer la limite de f quand x tend vers $+\infty$. En déduire la limite de f quand x tend vers $-\infty$.
4. Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.
5. Montrer que la dérivée de f sur D est

$$\forall x \in D, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

6. Etudier les variations de f.
7. Sur quel intervalle la fonction f est-elle convexe, concave ?

8. Ecrire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $x = 0$.

9. En déduire que

$$\forall x \geq 0, \;\; \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \leq x.$$

10. Montrer que f est une bijection de D sur $f(D)$. On déterminera $f(D)$.

11. Déterminer f^{-1}.

12. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \;\; F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1}.$$

On admet que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(a) Calculer la dérivée de F.

(b) Calculer

$$I = \int_0^1 f(t) dt.$$

13. Tracer le graphe de f et hachurez l'aire correspondante au calcul de I.