

## Examen du 15 octobre 2010

1heure 30

**Les calculatrices, les téléphones portables et tous les documents sont interdits.**

**Vous marquerez votre numéro de TD sur la copie dans l'espace prévu à cet effet.**

*Il sera tenu compte de la présentation, de la lisibilité et de la rédaction. Tous les calculs doivent figurer sur la copie : un résultat exact, mais non justifié sera considéré comme nul.*

**Exercice 1** On considère la fonction  $f$  définie par :

$$\forall x > 0, f(x) = x + \frac{3 + 2 \ln(x)}{x},$$

et la fonction  $g$

$$\forall x > 0, g(x) = x^2 - 2 \ln(x) - 1.$$

1. (a) Calculer la dérivée de  $g$ .  
(b) Donner le tableau de variations de  $g$ .  
(c) Quel est le signe de la fonction  $g$ ?
2. (a) Justifier que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .  
(b) Déterminer la limite de  $f$  quand  $x$  tend vers  $0^+$ .  
(c) Déterminer la limite de  $f$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .  
(d) Calculer la dérivée de  $f$ .  
(e) Donner le tableau de variations de  $f$ .  
(f) Sur quel intervalle la fonction  $f$  est-elle convexe, concave ?  
(g) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution notée  $a$ .  
Montrer que  $a \in ]0, 1[$ .  
(h) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point  $x = 1$ .  
(i) Tracer le graphe de  $f$ .

**Exercice 2** On considère pour tout entier  $k \geq 3$

$$I_k = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^k} dt.$$

1. Pour  $x \geq 1$ , on pose

$$F_k(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^k} dt.$$

A l'aide d'une intégration par parties, calculer  $F_k(x)$ .

2. En déduire que  $I_k$  est convergente et donner sa valeur.
3. Quelle est la limite de  $I_k$  lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ ?

**Exercice 3** On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x \frac{t^3}{(t^2 + 1)^3} dt.$$

1. Donner l'expression de  $F(x)$  en fonction de  $x$  en utilisant le changement de variable

$$u = t^2 + 1.$$

2. En déduire que  $\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{(t^2 + 1)^3} dt$  est convergente et donner sa valeur.
3. Montrer que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^3}{(t^2 + 1)^3} dt$  est convergente et donner sa valeur.
4. On pose pour tout réel  $x$  non nul:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) = \frac{F(x)}{x}.$$

Déterminer la limite de  $g(x)$  quand  $x$  tend vers 0.