Université Paris-Dauphine
Département LSO
DEGEAD 1ère année

UE 15 Outils mathématiques

Correction de l'examen du 15 octobre 2011

1heure 30

Exercice 1

1. (a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et
$$\forall x > 0, \quad g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = 2\frac{(x^2-1)}{x}.$$
(b) On en déduit que g est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$.
(c) D'après le tableau de variations de g,
$$\forall x > 0, \quad g(x) \geq g(1) = 0.$$
Par conséquent g est positive sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. (a) En tant que somme et fraction de fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$, la fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$.
(b) Par somme et produit de limite, la limite de f quand x tend vers 0^+ est $-\infty$.
(c) Par croissance comparée, la limite de $\frac{\ln x}{x}$ est nulle en $+\infty$ donc la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est $+\infty$.
(d) On a
$$\forall x > 0, \quad f'(x) = 1 + \frac{2 - 3 - 2\ln(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$
(e) D'après l'étude de g, la dérivée de f est positive sur $\mathbb{R}^{+*}$. Donc f est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
(f) Comme f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$, il suffit de calculer la dérivée seconde
$$\forall x > 0, \quad f''(x) = 4\frac{\ln(x)}{x^3}.$$
Donc f est concave sur $]0,1]$ et convexe sur $[1,+\infty[$.
(g) Comme f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ car la dérivée est positive et ne s'annule qu'en un réel $x = 1$, on en déduit que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $f(\mathbb{R}^{+*}) = \mathbb{R}$. Comme $0 \in f(\mathbb{R}^{+*}) = \mathbb{R}$, on en déduit que 0 a un unique antécédent a. Ce réel a est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$. Comme $f(1) = 4 > 0$, on en déduit que $a \in]0,1[$.
(h) L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $x = 1$ est $y = 4$ puisque la dérivée de f en 1 est nulle.

Exercice 2 1. Pour $t \geq 1$, on pose

$$u(t) = \ln(t) \text{ et } v(t) = \frac{t^{-k+1}}{-k+1}$$

les fonction u et v sont de classe C^1 sur $I\!R^{+*}$, on peut donc réaliser une intégration par parties sur l'intégrale $F(x)$ où $x \geq 1$. On a

$$u'(t) = \frac{1}{t} \text{ et } v'(t) = \frac{1}{t^k}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
F_k(x) &= [u(t)v(t)]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t}\Big(\frac{t^{-k+1}}{-k+1}\Big)dt \\
&= \ln(x)\frac{x^{-k+1}}{-k+1} + \frac{1}{k-1}[\frac{t^{-k+1}}{-k+1}]_1^x \\
&= \ln(x)\frac{x^{-k+1}}{-k+1} + \frac{1}{k-1}\Big(\frac{x^{-k+1}-1}{-k+1}\Big)
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\forall x \geq 1, \quad F(x) = \frac{\ln(x)}{(1-k)x^{k-1}} - \frac{1}{(k-1)^2}\Big(\frac{1}{x^{k-1}} - 1\Big)$$

2. En utilisant les croissances comparées la limite de $\frac{\ln(x)}{x^{k-1}}$ est nulle quand x tend vers $+\infty$. Donc I_k est convergente et

$$\forall k \geq 3, \quad I_k = \frac{1}{(k-1)^2}.$$

3. La limite de I_k lorsque k tend vers $+\infty$ est nulle.

Exercice 3 On pose

$$\forall x \in I\!R, \quad F(x) = \int_0^x \frac{t^3}{(t^2+1)^3} dt.$$

1. On pose $\phi(t) = t^2 + 1$, cette fonction ϕ est de classe C^1 sur $I\!R$, on peut donc utiliser ϕ pour effectuer un changement de variable, on a $du = 2tdt$ et $\phi(0) = 1$, $\phi(x) = x^2 + 1$ donc

$$\begin{aligned} \forall x \in I\!R, \quad F(x) &= \int_1^{x^2+1} \frac{u-1}{u^3} \frac{1}{2} du \\ &= \frac{1}{2} \int_1^{x^2+1} \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^3} du \\ &= \frac{1}{2} [\frac{-1}{u} - \frac{-1}{2u^2}]_1^{x^2+1} \\ &= \frac{1}{2} (\frac{-1}{x^2+1} + \frac{1}{2(x^2+1)^2} + \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

   Par conséquent

$$\forall x \geq 1, \quad F(x) = \frac{1}{2} (\frac{-1}{x^2+1} + \frac{1}{2(x^2+1)^2} + \frac{1}{2}).$$

2. La limite de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est $\frac{1}{4}$. Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{(t^2+1)^3} dt$ est convergente et vaut $1/4$.

3. On remarque que la fonction $t \mapsto \frac{t^3}{(t^2+1)^3}$ est impaire et comme d'après la question précédente l'intégrale est convergente en $+\infty$, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^3}{(t^2+1)^3} dt$ est convergente et vaut 0.

4. On reconnait un taux de variation de la fonction F en 0. Or la fonction F est dérivable sur $I\!R$ et

$$\forall x \in I\!R^{+*}, \quad F'(x) = \frac{x^3}{(x^2+1)^3}$$

   donc la limite de $g(x)$ quand x tend vers 0 est $F'(0) = 0$.