Université Paris-Dauphine
Département LSO
DEGEAD 1ère année

UE 15 Outils mathématiques

Examen du 16 octobre 2010

1heure 30

Les calculatrices, les téléphones portables et tous les documents sont interdits.

Il sera tenu compte de la présentation, de la lisibilité et de la rédaction. Tous les calculs doivent figurer sur la copie : un résultat exact, mais non justifié sera considéré comme nul.

Exercice 1 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x + 2 - 2\ln(e^x + 1)$$

et on note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonorrnal.

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout x réel, on a :

   $$f(x) = -x + 2 - 2ln(e^{-x} + 1)$$

   En déduire que f est paire sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
4. Démontrer que la droite D d'équation : $y = -x + 2$ est asymptote à C en $+\infty$. En déduire que C admet une asymptote en $-\infty$ dont on donnera l'équation.
5. Donner le tableau de variations de f.
6. Déterminer la solution, notée α , de l'équation $f(x) = x$.
7. Montrer que f est concave sur $\mathbb{R}$.
8. Tracer le graphe de f avec ses asymptotes.

Exercice 2 On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(1-x)^2} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[\\ 0 & \text{si } x \notin [0, 1[\end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. La fonction f est-elle dérivable en $x = \frac{1}{2}$?
3. Tracer le graphe de f.
4. Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et donner sa valeur.
5. Pour tout réel x, on pose $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Déterminer $F(x)$.

Exercice 3 Soit pour n entier

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1 + x)dx.$$

1. Calculer I_0.
2. En utilisant une intégration par parties montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx.$$
3. Montrer que
$$\forall x \in [0, 1], \;\; \frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}.$$
4. En déduire I_1.
5. Calculer en utilisant un changement de variable l'intégrale
$$J = \int_0^1 x^3 \ln(1 + x^2)dx$$