Université Paris-Dauphine
Département LSO
DEGEAD 1ère année

UE 15 Outils mathématiques

Correction de l'examen du 16 octobre 2010

1heure 30

Exercice 1 16 points

1. **1 point** On pose $g_1(x) = x + 2$ et $g_2(x) = e^x + 1$ donc

$$f = g_1 - 2\ln \circ g_2.$$

Les fonctions g_1 et g_2 sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ en tant que fonctions usuelles.
1 point De plus pour tout réel x, $e^x + 1 > 0$ donc $\ln \circ g_2$ est définie et de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ en tant que composées de fonctions usuelles.

Par conséquent f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

2. **2 points** Soit x réel, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 2 - 2\ln(e^x + 1) \\ &= x + 2 - 2\ln(e^x(1 + e^{-x})) \\ &= x + 2 - 2\ln(e^x) - 2\ln(1 + e^{-x}) \\ &= x + 2 - 2x - 2\ln(1 + e^{-x}) \\ &= -x + 2 - 2\ln(e^{-x} + 1). \end{aligned}$$

1 point On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = f(x)$$

donc f est paire sur $\mathbb{R}$.

3. **1 point** On utilise l'expression du 2). Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + e^{-x} = 1$ d'où par composition de limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = \ln(1) = 0$ et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} -x + 2 = -\infty$, on en déduit que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

4. **1 point** On a $f(x) - (-x + 2) = -2\ln(e^{-x} + 1)$ d'après le 2), donc

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (-x + 2) = 0.$$

1 point On en déduit que la droite D d'équation : $y = -x + 2$ est asymptote à C en $+\infty$. Par parité on en déduit que la droite D d'équation : $y = x + 2$ est asymptote à C en $-\infty$.

5. **1 point** Comme f est de classe C^2 sur $I\!R$, f est dérivable sur $I\!R$ et on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{2e^x}{e^x+1} \\ &= \frac{1-e^x}{e^x+1}. \end{aligned}$$

   1 point On en déduit que la fonction f est croissante sur $]-\infty, 0]$ et décroissante sur $]0, +\infty[$

6. **2 points** On a pour tout réel x

$$f(x) = x \Leftrightarrow x+2-2\ln(e^x+1) = x \Leftrightarrow \ln(e^x+1) = 1 \Leftrightarrow e^x+1 = e \Leftrightarrow x = \ln(e-1)$$

   car $e-1 > 0$. Donc il existe une unique solution à l'équation $f(x) = x$ qui est

$$\alpha = \ln(e-1)$$

7. **1 point** Comme f est de classe C^2 sur $I\!R$, f'' existe sur $I\!R$ et

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-e^x(e^x+1)-(1-e^x)e^x}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{-2e^x}{(e^x+1)^2}. \end{aligned}$$

   1 point La dérivée seconde est négative sur $I\!R$ donc f est concave sur $I\!R$.

8. **2 points : enlever 1 si pas d'asymptotes et 0,5 si une seule asymptote**

Exercice 2 16 points

1. **1 point** La fonction f n'est pas continue sur $I\!R$ puisque elle n'est pas continue en 0. En effet $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{2(1-x)^2} = \dfrac{1}{2}$

2. **1 point** La fonction f est continue en $x = \frac{1}{2}$ puisque $\lim\limits_{x\to 1/2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1/2^+} f(x) = 2$.

   On étudie alors le taux d'accroissement de f en $x = \frac{1}{2}$.

   2 points Si $x \in\in [0, \frac{1}{2}[$, alors $\frac{f(x)-f(1/2)}{x-1/2} = \frac{\frac{1}{2(1-x)^2}-2}{x-1/2} = \frac{1-4(1-x)^2}{(2x-1)(1-x)^2} = \frac{3-2x}{(1-x)^2}$ donc

$$\lim_{x\to 1/2^-} \frac{f(x)-f(1/2)}{x-1/2} = 8.$$

2 points Si $x \in\in [\frac{1}{2}, 1[$, alors $\frac{f(x)-f(1/2)}{x-1/2} = \frac{\frac{1}{2x^2}-2}{x-1/2} = \frac{1-4x^2}{(2x-1)x^2} = \frac{-(2x+1)}{x^2}$ donc

$$\lim_{x\to 1/2^+} \frac{f(x)-f(1/2)}{x-1/2} = -8.$$

1 point La fonction f n'est donc pas dérivable en $x = \frac{1}{2}$.

3. **2 points**

4. **1 point** La fonction est nulle en dehors de l'intervalle $[0, 1]$ donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et **1 point**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^{1/2} f(t)dt + \int_{1/2}^1 f(t)dt$$

Or **1 point**

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} f(t)dt &= \int_0^{1/2} \frac{1}{2(1-x)^2}dt \\ &= [\frac{1}{2(1-x)}]_0^{1/2} \\ &= 1-1/2 \\ &= 1/2. \end{aligned}$$

et **1 point**

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^1 f(t)dt &= \int_{1/2}^1 \frac{1}{2x^2}dt \\ &= [\frac{-1}{2x}]_{1/2}^1 \\ &= -1/2+1 \\ &= 1/2. \end{aligned}$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1.$$

5. Pour tout réel x, on a
   - **0.5 point** si $x \leq 0$, alors $F(x) = 0$.
   - **1 point** si $0 < x \leq \frac{1}{2}$, alors $F(x) = \int_0^x \frac{1}{2(1-t)^2}dt = \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2}$
   - **1 point** si $\frac{1}{2} < x \leq 1$, alors $F(x) = \int_0^{1/2} \frac{1}{2(1-t)^2}dt + \int_{1/2}^x \frac{1}{2t^2}dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x} + 1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2x}$
   - **0.5 point** si $1 < x$, alors $F(x) = 1$.

Exercice 3 8 points

1. **1 point** On effectue le changement de variable affine $u = 1 + x$ d'où

$$I_0 = \int_1^2 \ln(u)du = [u \ln u - u]_1^2 = 2\ln 2 - 1.$$

2. **1 point** On pose $u(x) = \ln(1+x)$ et $v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0,1]$, on peut donc effectuer une intégrations par parties sur I_n soit **1 point**

$$I_n = [\ln(1+x)\frac{x^{n+1}}{n+1}]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)}dx$$

soit

$$\forall n \in I\!N, \;\; I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx.$$

3. **1 point** On a en mettant au même dénominateur

$$\forall x \in [0,1], \;\; x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)+1}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}.$$

4. **2 points** D'après la question 2, on a

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx \\ &= \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 x - 1 + \frac{1}{x+1}dx \\ &= \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}[1/2x^2 - x + \ln(x+1)]_0^1 \\ &= \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}(-1/2 + \ln(2)) \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

5. **1 point** On utilise le changement de variable $u = \phi(x) = x^2$, la fonction ϕ est de classe C^1 et strictement croissante sur $[0,1]$.
1 point On obtient

$$J = \int_0^1 u\ln(1+u)\frac{du}{2} = \frac{1}{2}I_1 = \frac{1}{8}.$$