Université Paris-Dauphine
Département LSO
DEGEAD 1ère année

UE 15 Outils mathématiques

Examen du 8 novembre 2014

1heure 30

Les calculatrices, les téléphones portables et tous les documents sont interdits.

Il sera tenu compte de la présentation, de la lisibilité et de la rédaction. Tous les calculs doivent figurer sur la copie : un résultat exact, mais non justifié sera considéré comme nul.

Exercice 1 (3 points)
Montrer avec un raisonnement par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 2 (3 points) On considère les propositions suivantes

- P : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \ \forall y \in \mathbb{R}^*, \ \frac{x}{|x|} = \frac{y}{|y|} \Longrightarrow x = y.$
- Q : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \ \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \ \frac{x+1}{x-1} = \frac{y+1}{y-1} \Longrightarrow x = y.$

1. Donner les négations de P et Q.
2. Dire pour chacune de ces deux propositions si elles sont vraies ou fausses.

Exercice 3 (4 points) Soit une fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{b\}, f(x) = ae^{-x} + \frac{x\ln(x)}{(x-b)^2} + c,$$

où a, b et c sont des réels. Déterminer a, b et c sachant que

$$\lim_{x\to 3} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0.$$

Exercice 4 (10 points)
On considère la fonction f définie sur le domaine $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ f(x) = \frac{|x+3|}{|x|+1}.$$

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Donner l'expression de f sur $]-\infty, -3]$, $]-3, 0]$ puis $]0, +\infty[$.

3. Calculer la limite de f quand x tend vers $+\infty$ et la limite quand x tend vers $-\infty$.

4. Calculer la dérivée de f sur $]-\infty, -3[$, $]-3, 0[$ puis $]0, +\infty[$.

5. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? en -3 ?

6. Donner le tableau de variations de f. En déduire que

$$\forall x \in I\!R, \quad 0 \leq f(x) \leq 3.$$

7. Montrer que f est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f([0, +\infty[)$. On déterminera $f([0, +\infty[)$.

8. Tracer le graphe de f.