

Correction de l'Examen du 8 novembre 2014

1heure 30

Les calculatrices, les téléphones portables et tous les documents sont interdits.

Il sera tenu compte de la présentation, de la lisibilité et de la rédaction. Tous les calculs doivent figurer sur la copie : un résultat exact, mais non justifié sera considéré comme nul.

Exercice 1 (3 points)

- **0,5 point** : Pour $n = 0$, on a $\sum_{k=0}^0 k = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **2,5 points** : Soit $n \geq 0$ pour lequel la propriété est vraie, alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^n k + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}.$$

Donc la propriété est vraie pour $n + 1$

Par conséquent d'après le principe de récurrence, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 2 (3 points)

1. On a

- **0,5 point** : non P : $\exists x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}^*, \frac{x}{|x|} = \frac{y}{|y|}$ et $x \neq y$.
 - **0,5 point** : non Q : $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \exists y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \frac{x+1}{x-1} = \frac{y+1}{y-1}$ et $x \neq y$.
2. **0,5 point** : P est fausse avec $x = 1$ et $y = 2$ et **1,5 point** : Q est vraie car $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{1\},$

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{y+1}{y-1} \implies xy - x + y - 1 = yx - y + x - 1 \implies x = y.$$

Exercice 3 (4 points) **1 point** : Puisque $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$, on a $b = 3$.

1,5 point : Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} ae^{-x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x)}{(x-b)^2} =$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée on en déduit que $c = 1$.

1,5 point : Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ et comme $\lim_{x \rightarrow 0} ae^{-x} = a$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(x)}{(x-b)^2} =$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x)}{b^2} = 0$ par croissance comparée on en déduit que $a + c = 1$ donc
 $a = -1$.

Exercice 4 (10 points)

1. **0,5 point** : On a $\forall x \in \mathbb{R}, |x| + 1 \geq 1 > 0$ donc le dénominateur ne s'annule jamais donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. **1,5 points** : Donner 0,5 pour chaque réponse. On a pour tout réel x

$$f(x) = \frac{-x-3}{-x+1} \text{ si } x \leq -3, \quad f(x) = \frac{x+3}{-x+1} \text{ si } -3 < x \leq 0,$$

et

$$f(x) = \frac{x+3}{x+1} \text{ si } x > 0.$$

3. **1 points** : 0,5 pour chaque limite. On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{x+1} = 1$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-3}{-x+1} = 1$$

4. **1,5 points** : Donner 0,5 par réponse. On a

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}, \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{-4}{(-x+1)^2} & \text{si } x < -3, \\ \frac{4}{(-x+1)^2} & \text{si } -3 < x < 0, \\ \frac{-2}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

5. **2 points** : 1 point par taux d'accroissement. On étudie le taux d'accroissement
Si $-3 < x < 0$, alors

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{4}{1 - x}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 4$$

et si $x > 0$ alors

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-2}{1 - x}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -2$$

La fonction f n'est pas dérivable en 0.

De même elle n'est pas dérivable en -3 car

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3} = -1/4 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3} = 1/4$$

6. **1,5 point** : 1 point pour le tableau : La fonction f est décroissante sur $] -\infty, -3]$ puis croissante sur $[-3, 0]$ et décroissante sur $]0, +\infty[$. 0,5 point : par lecture du tableau on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq f(x) \leq 3.$$

7. **1 point** : 0,5 point : f est strictement croissante et continue sur $[0, +\infty[$ donc réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f([0, +\infty[)$ et 0,5 point : $f([0, +\infty[) =]1, 3]$.
8. **1 point** : Tracer le graphe de f .