

Examen du 30 janvier 2014

1heure 30

Les calculatrices, les téléphones portables et tous les documents sont interdits.

Vous marquerez votre numéro de TD sur la copie dans l'espace prévu à cet effet.

Il sera tenu compte de la présentation, de la lisibilité et de la rédaction. Tous les calculs doivent figurer sur la copie : un résultat exact, mais non justifié sera considéré comme nul.

Exercice 1 (60% de la note)

On considère la fonction f définie sur le domaine $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x - x \ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une fonction impaire sur $\mathbb{R}$ c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + f(-x) = 0.$$

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer la limite de f quand x tend vers $+\infty$. En déduire la limite de f quand x tend vers $-\infty$.
4. La fonction est-elle dérivable en 0 ?
5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$f(x) = 0.$$

6. Montrer que la dérivée de f sur $\mathbb{R}^*$ est

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = -\ln|x|.$$

7. Donner le tableau de variations de f .
8. On admet que f est C^2 sur $\mathbb{R}^*$. Sur quels intervalles de $\mathbb{R}^*$, la fonction f est-elle convexe, concave ?
9. Ecrire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $x = e$.

10. En déduire que

$$\forall x > 0, \quad x - x \ln |x| \leq e - x.$$

11. Montrer que f est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $f([1, +\infty[)$. On déterminera $f([1, +\infty[)$.

12. Calculer à l'aide d'une intégration par parties

$$I = \int_1^e f(t) dt.$$

13. Tracer le graphe de f en représentant la tangente obtenue à la question 9) et hachurez l'aire correspondante au calcul de I .

Exercice 2 (40% de la note)

On considère la fonction f définie sur le domaine $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x.$$

On admet que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer la limite de f quand x tend vers $+\infty$ ainsi que la limite de f quand x tend vers $-\infty$. On pourra utiliser la quantité conjuguée pour une des limites.

2. Montrer que la dérivée de f sur $\mathbb{R}$ est

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$. On précisera $f(\mathbb{R})$.

4. Déterminer f^{-1} .

5. On pose

$$A = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx, \quad B = \int_1^{\sqrt{2}-1} f^{-1}(y) dy.$$

(a) Sans calculer B , à l'aide du changement de variable $y = f(x)$ que l'on justifiera, montrer que

$$B = \int_0^1 x f'(x) dx.$$

En déduire à l'aide d'une intégration par parties que

$$B = \sqrt{2} - 1 - \int_0^1 f(x) dx.$$

(b) Calculer B et en déduire la valeur de A .