Université Paris-Dauphine
Département LSO
DEGEAD 1ère année

UE 15 Outils mathématiques

Correction de l'examen du 30 janvier 2013

1heure 30

Les calculatrices, les téléphones portables et tous les documents sont interdits.
Vous marquerez votre numéro de TD sur la copie dans l'espace prévu à cet effet.

Il sera tenu compte de la présentation, de la lisibilité et de la rédaction. Tous les calculs doivent figurer sur la copie : un résultat exact, mais non justifié sera considéré comme nul.

Exercice 1 (60% de la note)
On considère la fonction f définie sur le domaine $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x - x\ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. **0,5 point**
   On a
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)+f(-x) = x - x\ln(|x|) - x - (-x)\ln(|-x|) = -x\ln(|x|) + x\ln(|x|) = 0.$$
   Donc f est une fonction impaire sur $\mathbb{R}$.

2. **1 point et 0,5 si il y a seulement égalité des limites**
   La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$. Il reste à prouver la continuité en 0.
   Par croissance comparée
   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x - x\ln(x)) = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x - x\ln(-x)) = 0.$$
   Comme $f(0) = 0$, on a
   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$$
   ce qui prouve que f est continue en 0.

   Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. **1 point**
   On a
   $$\forall x > 0, \quad f(x) = x(1 - \ln x)$$
   De plus
   $$\lim_{x\to +\infty} 1 - \ln x = -\infty$$

donc par produit de limite

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

Comme f est impaire

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -f(-x) = +\infty.$$

4. **1 point**
   On étudie le taux d'accroissement
   $$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1 - \ln|x|$$
   donc
   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty.$$
   Par conséquent la fonction n'est pas dérivable en 0.

5. **1 point et 0,5 si il manque une racine**
   Comme $f(0) = 0$, 0 est une solution de cette équation.

   Par ailleurs, pour tout réel x non nul
   $$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x - x\ln|x| = 0 \\ &\iff \ln|x| = 1 \\ &\iff |x| = e. \end{aligned}$$
   Les solutions de $f(x) = 0$ sont 0, e et $-e$.

6. **0,5 point**
   On a
   $$\forall x \in I\!R^*, \quad f'(x) = 1 - \ln|x| - \frac{x}{x} = -\ln|x|\,.$$

7. **1 point**
   On en déduit que f est décroissante sur $[-\infty, -1]$ puis croissante sur $[-1, 1]$ puis décroissante sur $[1, +\infty[$.

8. **1 point**
   On admet que f est C^2 sur $I\!R^*$. On a
   $$\forall x \in I\!R^*, \quad f''(x) = \frac{-1}{x}$$
   On en déduit que f est convexe sur $]-\infty, 0[$ puis concave sur $]0, +\infty[$.

9. **0,5 point**
L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $x = e$ est
$$y = f'(e)(x - e) + f(e)$$
soit
$$y = -x + e.$$

10. **0,5 point**
Par concavité, le graphe de f est en dessous de sa tangente donc
$$\forall x > 0, \quad x - x \ln |x| \leq e - x.$$

11. **1 point**
La fonction f est continue, strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ donc réalise une bijection de $[1, +\infty[$ dans $f([1, +\infty[)$. De plus
$$f([1, +\infty[) =] \lim_{x \to +\infty} f(x), f(1)] =] - \infty, 1].$$

12. **2 points dont 1 point pour l'intégration par parties**
On a par linéarité
$$\begin{aligned} I &= \int_1^e f(t)\, dt \\ &= \int_1^e t - t \ln t\, dt \\ &= \int_1^e t - \int_1^e t \ln t\, dt \\ &= [\frac{t^2}{2}]_1^e - \int_1^e t \ln t\, dt \\ &= \frac{e^2 - 1}{2} - \int_1^e t \ln t\, dt \end{aligned}$$
Pour calculer $\int_1^e t \ln t\, dt$ on utilise une intégration par parties , on pose
$$u(t) = \frac{t^2}{2}, \quad v(t) = \ln t.$$
les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[1, e]$ donc
$$\int_1^e t \ln t\, dt = [\frac{t^2}{2} \ln t]_1^e - \int_1^e \frac{t^2}{2t} dt = \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{t}{2} dt = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2 - 1}{4}.$$
Donc
$$I = \frac{e^2 - 1}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{e^2 - 1}{4} = \frac{e^2 - 3}{4}.$$

13. **1 point, enlever 1 point si il manque la tangente ou la zone hachurée et 0 si la parité n'est pas respectée**
Le graphe de f

Exercice 2 (40% de la note)
On considère la fonction f définie sur le domaine $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x^2+1} - x.$$

On admet que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. **1,5 point dont 1 point pour la limite en $+\infty$ et 0,5 pour l'autre**
On a pour tout réel x avec la quantité conjuguée

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

On en déduit que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

On obtient directement par somme de limites que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

2. **1,5 point dont 1 point pour la dérivée et 0,5 pour les variations**
On a pour tout réel x

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Comme pour tout réel x, on a $x < \sqrt{x^2+1}$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) < 0.$$

Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. **1 point**
La fonction f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$. De plus

$$f(\mathbb{R}) =]\lim_{x \to +\infty} f(x), \lim_{x \to -\infty} f(x)[=]0, +\infty[.$$

4. **1 point**
On a pour tout réel x

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad y = \sqrt{x^2+1} - x \\ &\Longleftrightarrow \quad y + x = \sqrt{x^2+1} \\ &\Longleftrightarrow \quad (y+x)^2 = x^2+1, \\ &\Longleftrightarrow \quad y^2 + 2xy = 1, \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{1-y^2}{2y}. \end{aligned}$$

5. On pose

$$A = \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\, dx, \quad B = \int_1^{\sqrt{2}-1} f^{-1}(y)\, dy.$$

(a) **1,5 point dont 1 point pour la première égalité et 0,5 pour l'intégrations par parties**

La fonction f étant de classe C^1 sur $I\!R$, on peut effectuer le changement de variable $y = f(x)$. De plus comme $f(0) = 1$ et $f(1) = \sqrt{2}-1$, on obtient

$$B = \int_1^{\sqrt{2}-1} f^{-1}(y)\, dy = \int_{f^{-1}(1)}^{f^{-1}(\sqrt{2}-1)} f^{-1}(f(x))\, f'(x) dx = \int_0^1 x f'(x)\, dx.$$

Sans calculer B, à l'aide du changement de variable $y = f(x)$ que l'on justifiera, montrer que

$$B = \int_0^1 x f'(x)\, dx.$$

Puis par intégration par parties en posant que

$$u(x) = x, \quad v(x) = f(x),$$

les fonctions u et v sont C^1 sur $I\!R$ donc

$$B = \int_0^1 x f'(x)\, dx = [x f(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = f(1) - \int_0^1 f(x) dx,$$

donc

$$B = \sqrt{2} - 1 - \int_0^1 f(x)\, dx.$$

(b) **2 points dont 1 point pour B et 1 point pour la valeur de A**

Par calcul direct,

$$\begin{aligned} B &= \int_1^{\sqrt{2}-1} f^{-1}(y)\, dy \\ &= \int_1^{\sqrt{2}-1} \frac{1-y^2}{2y}\, dy \\ &= \int_1^{\sqrt{2}-1} \frac{1}{2y} - \frac{y}{2}\, dy \\ &= [\frac{1}{2}\ln y - \frac{y^2}{4}]_1^{\sqrt{2}-1}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}-1) - \frac{3-2\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{4}, \\
&= \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}-1) + \frac{\sqrt{2}-1}{2}.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx, \\
&= \int_0^1 f(x) + x\,dx \\
&= \int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 x\,dx \\
&= \sqrt{2} - 1 - B + \frac{1}{2}, \\
&= \sqrt{2} - 1 - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}-1) - \frac{\sqrt{2}-1}{2} + \frac{1}{2}, \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}-1).
\end{aligned}
$$