

Contrôle continu du 14 novembre 2013

1heure 30

Les calculatrices, les téléphones portables et tous les documents sont interdits.

Il sera tenu compte de la présentation, de la lisibilité et de la rédaction. Tous les calculs doivent figurer sur la copie : un résultat exact, mais non justifié sera considéré comme nul.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur le domaine D par :

$$\forall x \in D, f(x) = e^{x-1} - 1.$$

1. (a) Quel est le domaine de définition D de la fonction f .
(b) Calculer la dérivée de f .
(c) Établir le tableau de variations de f .
(d) Sur quel intervalle la fonction f est-elle convexe, concave ? On admet que f est C^2 sur D .
(e) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $x = 1$.
(f) En déduire que
$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{x-1} \geq x.$$

(g) Montrer que f est une bijection de D sur $f(D)$. On déterminera $f(D)$.
(h) Déterminer f^{-1} .
(i) Tracer la courbe représentative de f .
2. On se propose d'étudier les solutions de l'équation $f(x) = x$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x) - x.$$

- (a) Établir le tableau de variations de g .
- (b) Montrer par lecture du tableau de variations que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions qu'on notera a et b ($a < b$).
- (c) Montrer que $1 < b < 2$, on admet que $e = 2,7$.
- (d) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet comme seules solutions a et b .

Exercice 2 On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$g(x) = e^{-|x|} \times x^2$$

1. La fonction g est-elle paire ou impaire ?
2. Etudier les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Calculer la dérivée de g .
4. Etudier les variations de la fonction g .
5. Etudier la convexité de g .
6. Tracer le graphe.